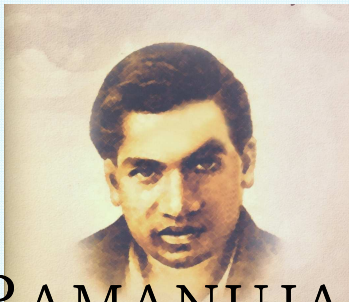




RAMANUJAN

Készítette: Kiss Annamária
Felkészítő tanár: Mészár Julianna

2011, május 19-21

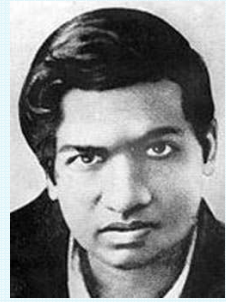
Ki volt Ramanujan?



Srinivasa Ramanujan Iyengar
1887. december 22-én született Indiában, egy Madrashoz közeli kisvárosban (Erodeban), nagyon szerény, vallásos brahmin családból.

1892. Október 1-jén, 5 évesen, kezdte meg tanulmányait a helyi iskolában. Matematikai képességei 10 éves korában kezdtek mutatkozni.

Ramanujan mára múzeumná alakított szülőháza



- 16 évesen ösztöndíjjal bekerült „Dél-India Cambridgeébe”.
- Naplóba kezdett, melybe leírta napi felfedezéseit.
- 1904-ben, az összes nem matematika jellegű tantárgyból megbukott.

1910-től Ramanujan egyik matematikustól a másikhoz ment bemutatván (ekkor már két) matematikai naplóját, majdnem 0 hatásfokkal.

1911-ben jelentek meg első dolgozatai az *Indian Mathematical Journal*-ben.

1913-ban elszánta magát barátai rábeszélésére, hogy írjon Hardynak.

Hardy professzor felismerte benne matematikai tehetségét, és bár voltak kétségei a tételek valóságára felől, magához hívatta, hogy diákja legyen. Hardy egyeseket már ismert Ramanujan tételei közül, néhány azonban nehezen hihetőnek tűnt.

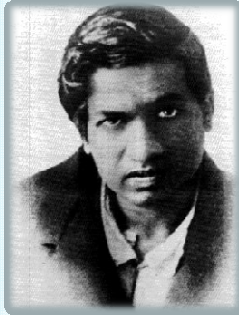
Ramanujan, 1914. Március 30-án elindult hajón Angliába: Cambridge-be április 16-án érkezett.




$$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$9^3 + 10^3 = 12^3 + 1$$

1917. márciusában a feszített munka, a gyenge táplálkozás és az angol éghajlat miatt tudóvést kapott amely miatt végül is már 1919-ben hazautazott.



Kevesebb mint egy éve maradt arra, hogy hazájában éljen (és hogy egyáltalán éljen). 1920-ban írja utolsó levelét Hardy-nak, majd április 26-án meghal.

Emlékét 3-4 ezer tétel őrzi.

Formulái

1. A Ramanujan-Nagell egyenlet

Első Hardy-nak küldött levelében (1913) szerepelt az alábbi exponenciális diofantoszi egyenlet:

$$2^n - 7 = x^2$$

melynek megoldásai csak akkor elemei a természetes számok halmazának, ha $n = 3, 4, 5, 7$ és 15 .

Ramanujan ezen feltételezését, csak jóval halála után, 1943-ban bizonyította be Trygve Nagell, norvég matematikus.

Sorra veszünk értékeket az n -re:

$n = 1 \rightarrow 2^1 - 7 = \rightarrow x^2 = -5$ nem teljes négyzet
 $n = 2 \rightarrow 2^2 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = -3$ nem teljes négyzet
 $n = 3 \rightarrow 2^3 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_{1,2} = \pm 1$
 $n = 4 \rightarrow 2^4 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_{1,2} = \pm 3$
 $n = 5 \rightarrow 2^5 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x_{1,2} = \pm 5$
 $n = 6 \rightarrow 2^6 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 57$ nem teljes négyzet
 $n = 7 \rightarrow 2^7 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x_{1,2} = \pm 11$
 $n = 8 \rightarrow 2^8 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 249$ nem teljes négyzet
 $n = 9 \rightarrow 2^9 - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 505$ nem teljes négyzet
 $n = 10 \rightarrow 2^{10} - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 1017$ nem teljes négyzet
 $n = 11 \rightarrow 2^{11} - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 2041$ nem teljes négyzet
 $n = 12 \rightarrow 2^{12} - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 4089$ nem teljes négyzet
 $n = 13 \rightarrow 2^{13} - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 8185$ nem teljes négyzet
 $n = 14 \rightarrow 2^{14} - 7 = x^2 \rightarrow x^2 = 16377$ nem teljes négyzet
 $n = 15 \rightarrow 2^{15} - 7 = x^2 = 32761 \rightarrow x_{1,2} = +181, -181$
 $n = 16 \rightarrow 2^{16} - 7 = x^2 = 65529 \rightarrow$ nem teljes négyzet

Tehát 3, 4, 5, 7 és 15 - re valóban egész megoldást kapunk.

- Ezután megpróbáltam megoldani az adott diofantikus egyenletet

$$2^n - 7 = x^2 \mid -1$$

$$\rightarrow 2^n - 8 = x^2 - 1$$

$$\rightarrow 2^n - 2^3 = (x-1)(x+1)$$

$$\rightarrow 2^3(2^{n-3} - 1) = (x-1)(x+1) \text{ ha } n \geq 3$$

Tehát megkaptam a feltételt, hogy az n legkisebb értéke 3 lehet.

Behelyettesítve az $2^n - 8 = x^2 - 1$ egyenletbe, két esetet tárgyalunk:

I. Ha $n = 3$

II. Ha $n > 3$

$$n = 3 \quad 0 = (x-1)(x+1) \rightarrow \text{I. } x_1 = 1$$

$$\text{II. } x_2 = -1$$

$$n > 3 \quad 3 \rightarrow 2^3(2^{n-3} - 1) = (x-1)(x+1)$$

2^3 páros

$2^{n-3} - 1$ páratlan

Szorzatuk biztos, hogy páros, $x-1$, $x+1$ ugyanolyan paritású $\rightarrow x-1$, $x+1$ páros szám kell legyen $\rightarrow x$ páratlan $\rightarrow x = 2k+1$

$$2^3(2^{n-3} - 1) = k(k+1)$$

Az x helyére behelyettesítve az $x = 2k + 1$ eredményt kapunk $n=4$, $n=5$, és $n=7$ -re, $n=15$ viszont ezzel a módszerrel már nem.

2. Nagyon összetett számok

Ha Ramanujan megsejtett egy összefüggést, ezt számpéldákon verifikálva nyert impulzust további megfontolások keresésére. Kifejezetten ezen az úton jutott eredményeihez, azon n számokra vonatkozólag, melyekre

$$d(n) > d(v) \quad \text{ha} \quad 1 \leq v < n$$

Itt $d(n)$ jelenti az n egész szám pozitív osztói számát. Az ilyen számokat „highly composed numbers”-nak, „nagyon összetett” számoknak nevezve, felírta az első kb. 2000 ilyen számot az utolsó

$$n=146\,659\,312\,800 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Én is próbáltam keresni „nagyon összetett” számokat (v az n szám előtt levő számok):

$$n = 2$$

$$v = 1$$

$d(2) = \{1, 2\}$ - tehát a 2-es egy „nagyon összetett” szám, mivel több osztója van, mint az előtte levő számnak.

$$n = 3$$

$$v = 1; 2;$$

$d(3) = \{1, 3\}$ - a 3-as nem „nagyon összetett”, mivel az előtte lévő szám ugyanannyi osztóval rendelkezik

$$n = 4$$

$$v = 1; 2; 3;$$

$d(4) = \{1, 2, 4\}$ - „nagyon összetett”, mivel sem a 1-es, sem a 2-es, sem a 3-as nem rendelkezik több osztóval nála.

Az általam megtalált „nagyon összetett” számok, 200-ig:

2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180;

3. A Hardy-Ramanujan szám

Mikor egyszer Hardyval Londonban taxival utaztak, Hardy a taxi távozása után jött rá, hogy aktatáskáján a kocsiban felejtette. A táskában kéziratok voltak, így kétségbe esett, de Ramanujan megnyugtatta, nincs baj, ő emlékszik, hogy a taxi száma **1729**. Hardy nagyon megkönnyebbült, de rögtön megkérdezte, hogy jutott eszébe *egyáltalán* megjegyezni a taxiszámot, és ha már igen, *hogyan* lehetett egy ilyen érdektelen számot megjegyezni. Nem érdektelen ez a szám, felelte Ramanujan, ez a legkisebb egész szám, amely egynél többféleképp állítható elő két köbszám összegeként. Valóban:

$$1729 = 1 + 1728 = 1^3 + 12^3 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

A számot egyébként Ramanujan előzőleg találta ki, később ugyanis megtalálták az egyik naplójában.

Könyvészet

1. Turán Pál: *Egy különös életút, Ramanujan* (KöMaI 1977. Októberi szám)
2. Dr. Bege Antal : *Prímek versenyben*
3. Bruce C. Berndt: *An overview of Ramanujan's notebooks*
4. Szendrei Julianna: *Gondolod, hogy egyre megy?* OM, 2005
5. Baran Sándor, Major Péter: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, OM, 2003

Köszönöm a figyelmet!
Thank you for the
attention!

