Szénási Eszter
SZTE TTIK Matematika BSc,
Numerikus matematika projekt
2015. november 30.

A Newton-Raphson iteráció kezdeti értéktől való érzékenysége

Medencék (attraktorok) színezése

Alapfeladat: függvény zérushelyének közelítése

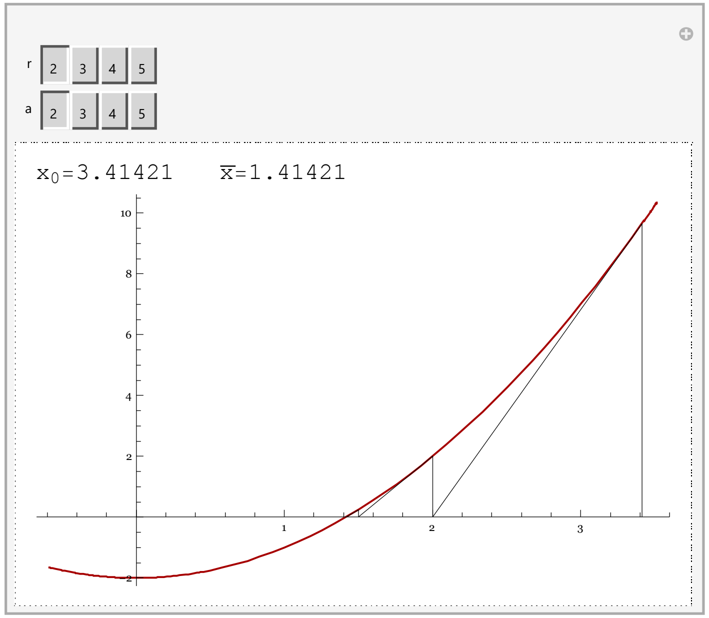
Az $f(x) = 0$ nemlineáris egyenlet (valamely) $\xi \in \mathbb{R}$ zérushelyének meghatározása, ahol $f(x)$ differenciálható függvény ξ egy (kicsiny) környezetében, ott $f'(x) \neq 0$ és abban a környezetben adott egy $x_0 \in \mathbb{R}$, melyet kezdeti közelítésnek nevezünk.

- Geometriai megközelítés (érintő módszer): Newton-Raphson iteráció
  - Az érintő egyenlete $(x_0, f(x_0))$ pontban $y = f(x)$ függvény esetén
    - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
  - Ennek az x –tengellyel való $(x_1, 0)$ metszéspontjának x_1 koordinátáját az alábbi egyenletből határozzuk meg
    - $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$
    - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  - Az eljárást ismételve most az x_1 pontból, majd az újonnan keletkezett pontokból, az $\{x_m\} \subset \mathbb{R}$ iterációs sorozathoz jutunk, amelynek általános képlete:
    - $x_m := x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_{m-1})}, \ m = 1, 2, \ldots$

Alkalmazása - gyökvonás

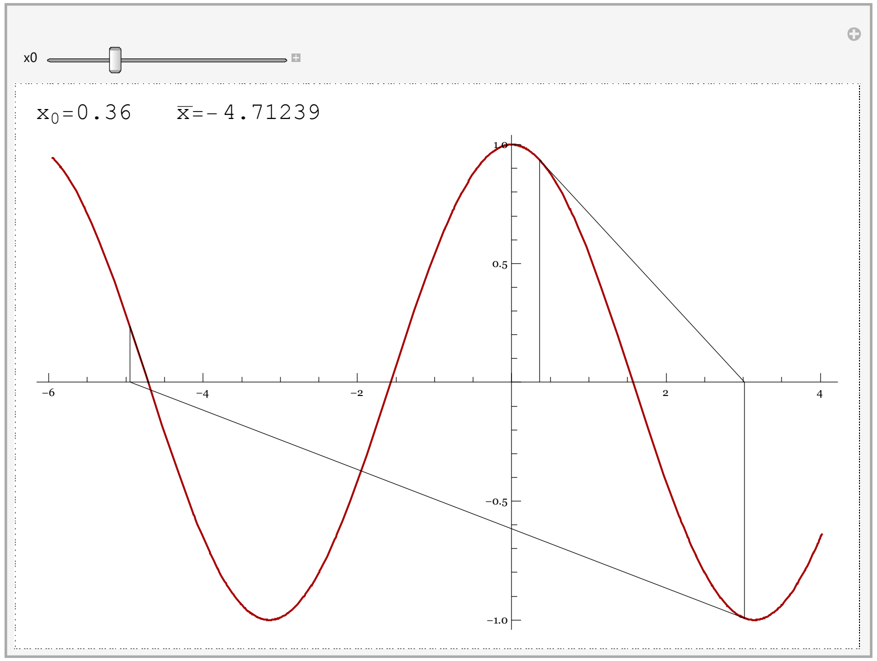
A Newton-Raphson iteráció alkalmazása pozitív számokból való gyökvonás gyors elvégzésére.

- Legyen $f(x) = x^r - a$, melynek zérushelye: $\xi = \sqrt[r]{a}$ $(a > 0,\ r > 0)$
- Elegendő az $a > 1$ esetet tekinteni, mert ha $0 < a < 1$, akkor
  - $\sqrt[r]{a} = \frac{1}{\sqrt[r]{\frac{1}{a}}}$ és $\frac{1}{a} > 1$
- Tehát ebben az esetben az iteráció:
  - $x_m := x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_{m-1})} = x_{m-1} - \frac{x^r_{m-1} - a}{r\, x^{r-1}_{m-1}} = \frac{1}{r}\left((r-1)\, x_{m-1} + \frac{a}{x^{r-1}_{m-1}}\right),\ m = 1,\ 2,\ \ldots$



Kezdeti értéktől való függés érzékenysége

- Problémás értékek: $f'(x)$ “kicsi”.
- Az ábrán: cos(x) függvény zérushelyeinek közelítése NR-iterációval, dinamikusan
  - Már itt is látható, mennyire függ a rendszer viselkedése a kezdőérték választásától



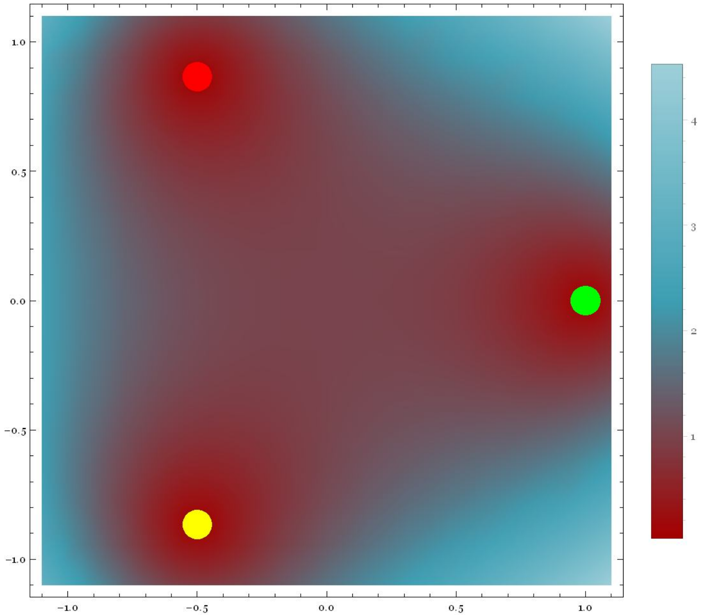
Megjegyzés: konvergencia

- ξ egyszeres zérushelye $f(x)$ – nek $\Leftrightarrow f(\xi) = 0$ és $f'(\xi) \neq 0$.
- A közelítés hibája : $e_m = x_m - \xi$, ahol ξ az $f(x)$ gyöke
- A Newton-Raphson iteráció hibaképlete : $e_m = \frac{f''(\alpha_{m-1})}{2 f'(x_{m-1})} e_{m-1}{}^2$, ahol $\alpha_{m-1} \in (\xi, x_{m-1})$
- A Newton-Raphson iteráció négyzetes konvergenciája: $\lim_{m\to\infty} \frac{e_m}{e_{m-1}{}^2} = \frac{f''(\xi)}{2 f'(\xi)}$
  - Aszimptotikus hibakonstans: $\frac{f''(\xi)}{2 f'(\xi)}$

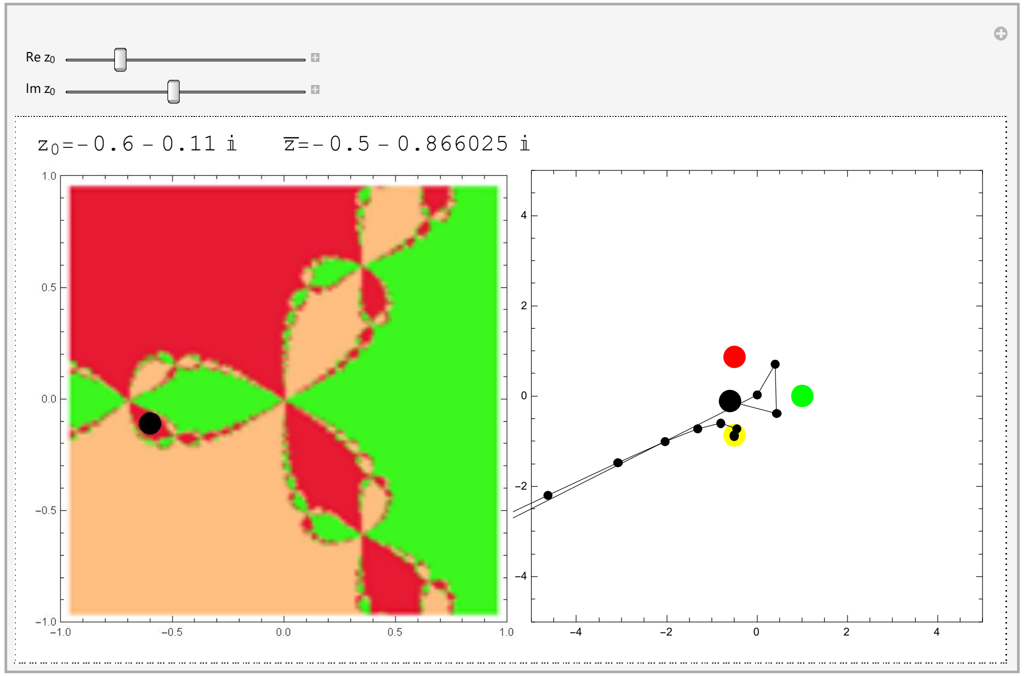
Általánosítás a komplex síkra

- Példa: komplex egységgyökök közelítése
- Legyen $f(z) = z^r - 1$, $(r = 2, 3, 4, 5, \ldots.)$
- Az iteráció azonos a valós esettel:
  - $z_m := z_{m-1} - \frac{f(z_{m-1})}{f'(z_{m-1})} = z_{m-1} - \frac{z^r{}_{m-1} - 1}{r\, z^{r-1}{}_{m-1}}, \quad m = 1, 2, \ldots$
- Legyen $r = 3$:

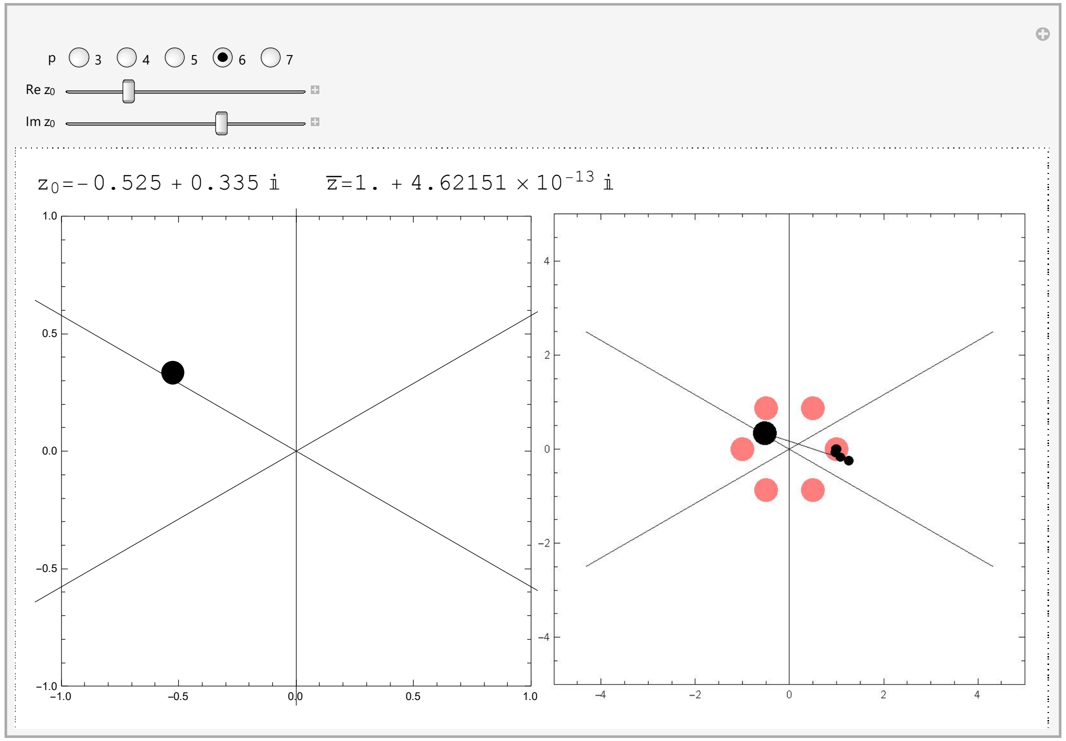
```
f[z_] := z^3 - 1;
Show[DensityPlot[Abs[f[x + I y]], {x, -1.1, 1.1}, {y, -1.1, 1.1}, PlotLegends → Automatic],
 Graphics[{Thread[{{Yellow, Red, Green},
     PointSize[0.05], Map[Point[Through[{Re, Im}[#]]] &, z /. NSolve[f[z] == 0, z]]}]}]
]
```



Manipuláció - dinamikus megjelenítés



Magasabb hatványokra



Newton-fraktálok

Fraktálok

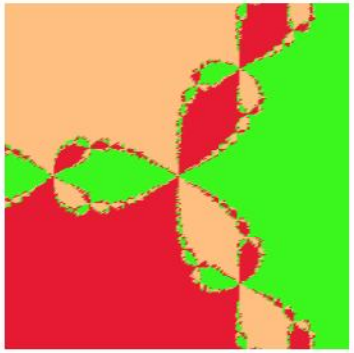
- Végtelenül komplex geometriai - úgynevezett önhasonló alakzatok, amelyek két gyakori, jellemző tulajdonsággal rendelkeznek:
  - Határoló vonalaik vagy -felületeik végtelenül „gyűröttek" vagy „érdesek", illetve „szakadásosak", vagyis nem-differenciálhatóak.
  - Ebből kifolyólag az olyan geometriai jellemzőik, mint a kerület, terület, térfogat, ívhossz, felszín, stb. elfajult (végtelen vagy nulla) értékeket adnak, és általában is, a térszemlélettel ellentétesen, meglepő és paradox módon viselkednek.

Newton-fraktál

- Egy korlátos halmaz a komplex számsíkon, melyet egy konkrét polinom gyökeit számoló Newton-iteráció határoz meg.
- A Newton-fraktálra tekinthetünk úgy, mint egy hozzárendelésre a komplex számsíkon, amely a z_0 kezdeti értékhez rendeli hozzá az iteráció határértékét (színezés).
  - mivel véges sok határérték van (n. gyököt számolunk), ezért a határérték argumentuma szerint célszerű színezni

```
newt = Compile[{{n, _Integer}, {z, _Complex}}, Arg[FixedPoint[# - (#^n - 1) / (n #^(n - 1)) &, z, 100]]];
Show[GraphicsGrid[Partition[Table[ListDensityPlot[Table[newt[n, b + a I], {a, -1.1, 1.1, 0.015}, {b, -1.1, 1.1, 0.015}], Mesh → False,
      ColorFunction → "BrightBands", Frame → False, DisplayFunction → Identity, ImageSize -> {300, 300}], {n, 3, 6}], 3]]]
```

```
image = Image[ListDensityPlot[Table[newt[3, b + a I], {a, -1.1, 1.1, 0.008}, {b, -1.1, 1.1, 0.015}],
   Mesh → False, Frame → False, ColorFunction → "BrightBands", DisplayFunction → Identity, ImageSize -> {300, 300}]]
```

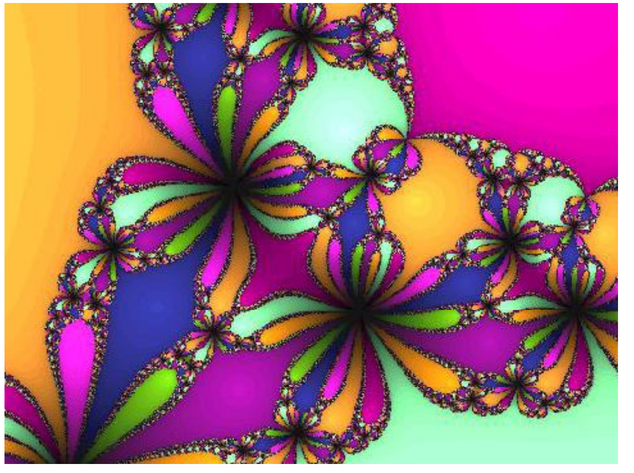


Források

- http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html
- http : // mathforum.org/advanced/robertd/newtons.html
- https://reference.wolfram.com/language/tutorial/UnconstrainedOptimizationNewtonsMethodMinimum.html
- http://www.model.u-szeged.hu/kurzus-19-1-felsobb_mathematica.html
- Móricz Ferenc: Bevezetés a numerikus matematikába (Polygon jegyzettár)
- Richard L. Burden, J. Douglas Faires: Numerical Analysis
- Berkey, Blanchard: Calculus
- https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_fractal
- http://www.mitchr.me/SS/newton/
- http://eldar.mathstat.uoguelph.ca/dashlock/ftax/Newton.html

- Köszönet Dr. Karsai Jánosnak a programozásban nyújtott segítségéért

Köszönöm a figyelmet!



Newton-fraktál az $x^8+15\,x^4-16$ polinomra