



ARANYMETSZÉS

- érettségi dolgozat védeése analízis és algebrából -

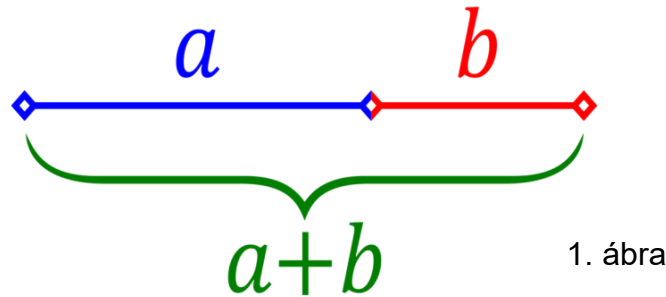
Készítette: Szénási Eszter
Mentor: Dr. Péics Hajnalka
2014. június 11.
Zenta

TARTALMI ÁTTEKINTÉS

- Az aranymetszés fogalma
 - eredete és előfordulása
- Néhány fontosabb definíció, tétel, bizonyítás
 - Sorozatok megadása
 - Sorozatok határértékével kapcsolatos fogalmak
 - Fibonacci-sorozat
 - Az aranymetszés és a Fibonacci-sorozat kapcsolata
- A Fibonacci sorozat eredete, geometriai ábrázolása, összegképlete
- A Fibonacci-spirál
- Saját méréseim menete
 - zentai épületek
 - Képzőművészet
 - Aranymetszés néhány magyar vonatkozású művészeti alkotásban

AZ ARANYMETSZÉS FOGALMA

- **Definíció.** Az arany metszés egy távolságnak vagy mennyiségnek oly módon történő kettéosztása, amelyben az egész rész úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint a nagyobbik a kisebbikhez.



- **Tétel.** Az arany metszés nagyobbik és kisebbik részének aránya ϕ , azaz $\frac{a}{b} = \phi$
- **Bizonyítás.** A definícióból kiindulva.
- **Megjegyzés.**

AZ ARANYMETSZÉS EREDETE ÉS ELŐFORDULÁSA

- Pitagoreusok (Hippaszosz – szabályos ötszög)
- Misztikus jelentés → vallások
- Művészetek, természet
- Ókori görögök – Parthenon (i.e. 400-as évek)
- Euklidész: *Elemek* (kb. i.e. 300)



2. ábra

NÉHÁNY FONTOSABB DEFINÍCIÓ, TÉTEL, BIZONYÍTÁS

Sorozatok

- **Definíció.** Azokat az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényeket, melyek minden n természetes számhoz egy a_n valós számot rendelnek hozzá, végtelen számsorozatoknak, röviden sorozatoknak nevezzük.
- *Sorozatok megadása:*
 - Rekurzív formulával
 - Utasítással, leírással
 - Képlettel, formulával

Sorozatok határértéke

- **Definíció.** Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens (tart valahová), ha létezik olyan A szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan N természetes küszöbszám, hogy ha $n \geq N$, akkor a sorozat elemeinek A számtól való eltérése kisebb, mint ε , azaz $\varepsilon > |a_n - A|$.
- **Definíció.** Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan A szám, hogy A bármely környezetébe a sorozatnak véges sok elem kivételével minden eleme beletartozik.
- Az A szám az $\{a_n\}$ sorozat határértéke (limesze).
- **Tétel.** Konvergens sorozatnak **csak egy** határértéke van.
- **Bizonyítás.** Indirekt módon.

A Fibonacci-sorozatról

- **Definíció.** A Fibonacci-sorozat egy olyan, természetes számokból álló rekurzív számsorozat, amelynél az első két tag adott: $f_1 = 1$ és $f_2 = 1$, az összes többi tagot pedig az öt megelőző két tag összegéből képezzük. Általánosan: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
- **Definíció.** Azt a számsorozatot, amelyben minden elemet (tagot) az öt megelőzőből egy $q \neq 0$ számmal való szorzással kapunk, mértani (vagy geometriai) sorozatnak nevezzük. A q szám a sorozat hányadosa (kvóciense).
- **Tétel.** A Fibonacci-sorozat általános elemének képlete:
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$
- **Bizonyítás.** Legyen $a_n = t^n, \{t^n\}$ mértani sorozat ($t \neq 0$), amely kielégíti a fenti formulát.

Az aranymetszés és a Fibonacci-sorozat kapcsolata

- **Tétel.** A Fibonacci-sorozat szomszédos tagjainak hányadosaiból (ahol a számláló értéke nagyobb a nevezőjénél) alkotott számsorozat határértéke ϕ .
- **Bizonyítás.** A tétel alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = H$$

$$1 + \frac{1}{H} = H$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = H$$

$$H^2 - H - 1 = 0$$

$$1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = H$$

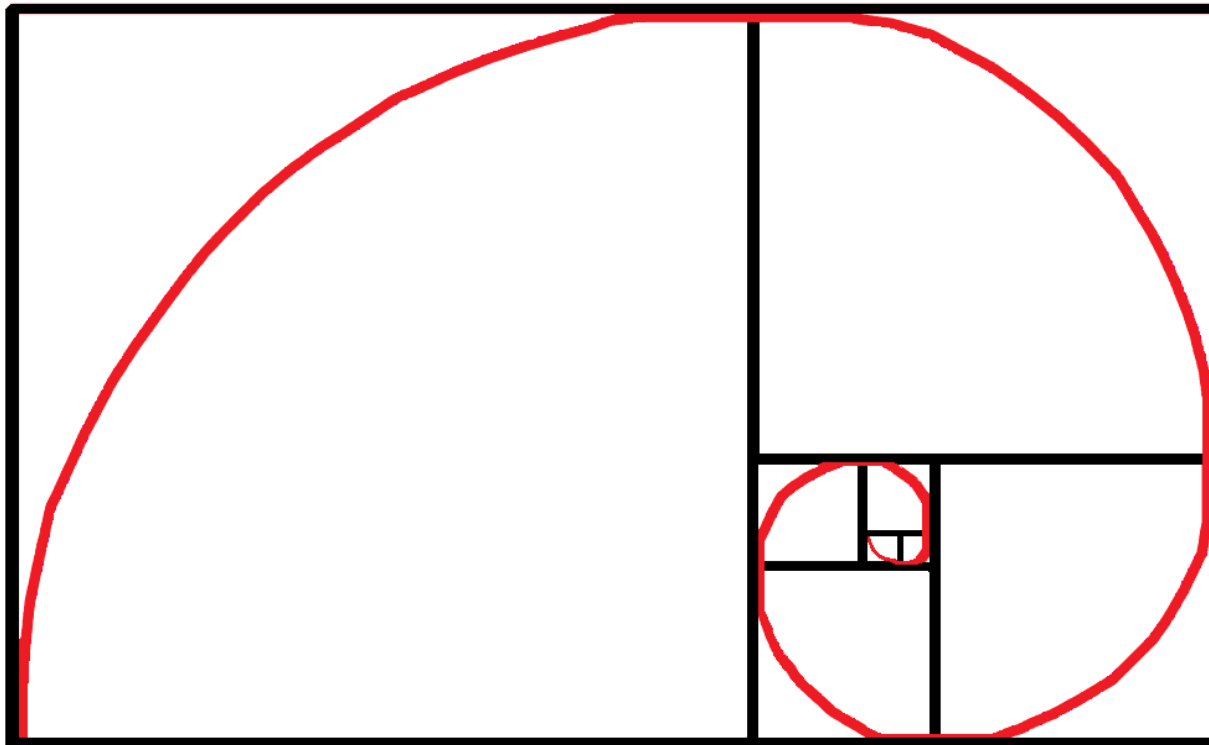
$$H_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$H_1 \approx 1,618 = \phi$$

- **Megjegyzés.**

A FIBONACCI-SPIRÁL

- Geometriai ábrázolásnál – belülről kifelé haladva, a kezdő négyzetek közepén



5. ábra

SAJÁT MÉRÉSEK

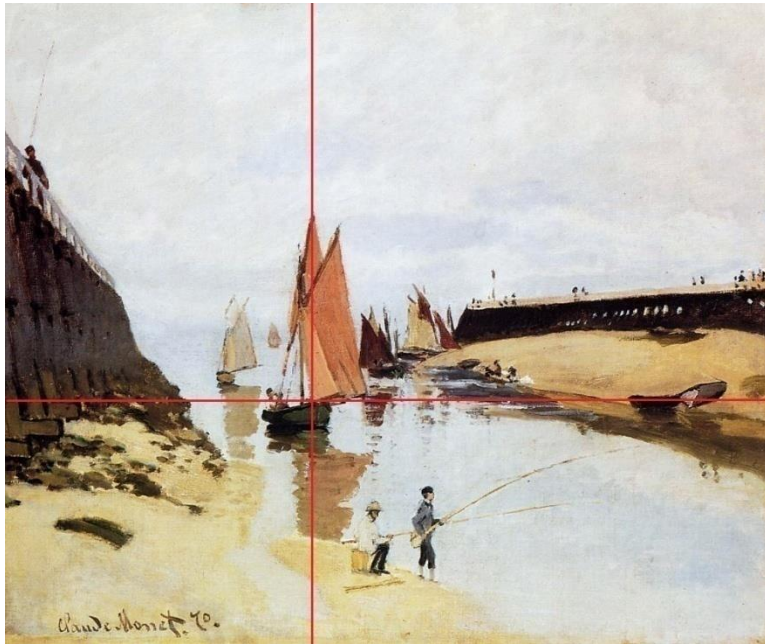
Zentai épületek

- Véletlenszerűen választott épületek

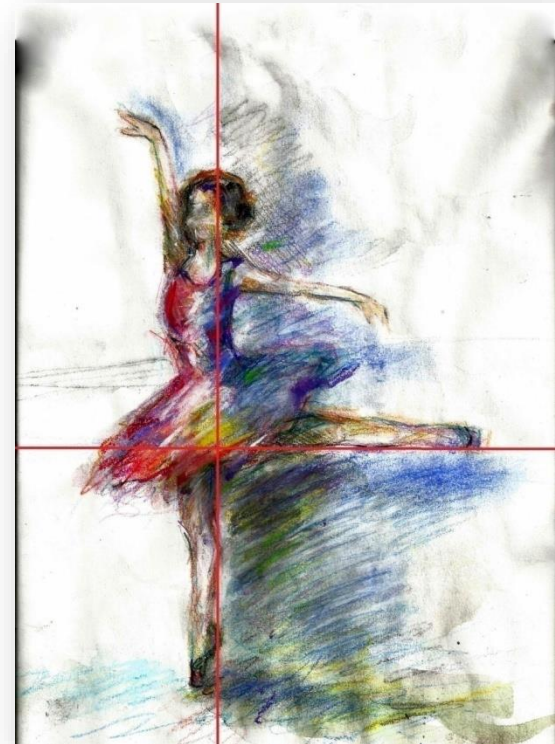


Képzőművészet

- Leonardo Da Vinci: *Mona Lisa*, *Vitruvius-vázlat*
- Claude Monet: *A Trouville-i kikötő*
- Szabó Kornélia (Bolyai TKG, 4. osztály, képzőművészet)



6. ábra



7. ábra

Arany metszés néhány magyar vonatkozású művészeti alkotásban

- Madách Imre: *Az ember tragédiája*
- Országház (Steindl Imre)



8. ábra

- Szent Korona



9. ábra

- Erkel Ferenc: *Himnusz*

Himnusz

Ferenc Köksey

FERENC ERKEL

The image shows a musical score for the hymn 'Himnusz' by Ferenc Erkel. It consists of four systems of music. Each system includes a vocal line (treble clef) and a piano accompaniment (grand staff). The lyrics are in Hungarian. The first system is an instrumental introduction marked 'Allegro' with a tempo of 80. The second system begins with the lyrics 'Is-ten ál-dí-va ma-gyart jó kedv-vel, bősé-ge-vel, Nyúj-ta fe-ke-je ve-dő kar-t,'. The third system continues with 'Ha kí-tód el-len-ség-ge-vel; Bal-sa-g-sa-ka-rit ré-gen tép, Ho-zzá rá vig-ora-ten-dő-vel. Meg-bí-n-ko-rod-ás-ért' and features dynamic markings *mf*, *f*, and *ff*. The *ff* marking in the vocal line is circled in red. The fourth system concludes with the lyrics 'már e-rép, A múlt-tat s jó-ven-dőt!'.

10. ábra

ÖSSZEGZÉS

- Aranymetszés – egyszerű matematikai arány
- Az egyik leggyakoribb a természetben és az ember alkotta világban
- A mai napig jelen van
- Tudatos és tudat alatti alkalmazás
- Szépérzékünk meghatározója

FELHASZNÁLT IRODALOM ÉS KÉPEK FORRÁSAI

- [1] – Csikós Pajor Gizella, Péics Hajnalka: Analízis – elméleti összefoglaló és példatár, Bolyai Farkas alapítvány, Zenta, 2010
- [2] – Kovács Ádám, Dr. Vámos Attila: Aranyháromszög: Aranymetszés, Fibonacci-sorozat, szabályos ötszög, Műszaki kiadó, Budapest, 2007
- [3] – Sain Márton: Nincs királyi út!, Gondolat kiadó, Budapest, 1986
- [4] – Hámori Miklós: Arányok és talányok, Magyar világ kiadó, Budapest, 2002
- [5] – Vajdasági Magyar Digitális Adattár (<http://adattar.vmmi.org/>), 2013.09.10.
- [6] – Zenta község hivatalos honlapja (<http://www.zenta-senta.co.rs/hu>), 2013.09.10.
- 1. ábra: <http://hmlowlifes.files.wordpress.com/2010/10/02-golden-ratio-math.jpg?w=460&h=300> (2014.05.13.)
- 2. ábra: <http://www.goldennumber.net/parthenon-phi-golden-ratio/> (2014.03.12.)
- 3. ábra: <http://tresorsdevie.free.fr/?p=139> (2014.04.10.)
- 6. ábra: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Harbour_at_Trouville_Claude_Monet.jpg (2014.05.18.)
- 7. ábra: Szabó Kornélia vázlatrajza (2014.03.20.)
- 8. ábra: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Budapest_Parliament_4604.JPG (2014.05.18.)
- 9. ábra: <http://kovacsneagi.qwqw.hu/?modul=oldal&tartalom=1105190> (2014.05.18.)
- 10. ábra: <http://henriettagrue.se/xabaoi/hymne-ungarn.html> (2013.12.02.)

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!