SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

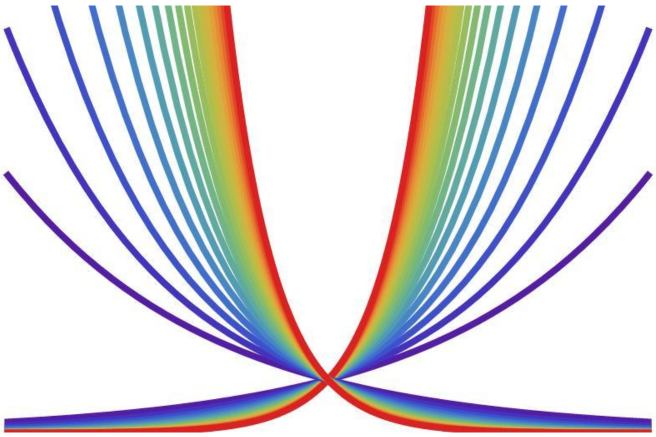
Az exponenciális és logaritmus függvények bevezetése a középiskolában biológiai motivációval

Szakdolgozat

Horti Krisztina

Matematika – Biológia tanár

Témavezető:
Dr. Karsai János
egyetemi docens



Szeged
2020

Tartalom

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Karsai Jánosnak segítőkészségéért, és hogy magyarázataival, észrevételeivel és tanácsaival segítette dolgozatom elkészülését, valamit, hogy bármikor fordulhattam hozzá a felmerülő problémákkal.

Szeretném megköszönni szüleimnek, testvéremnek, Horti Katalinnak és Mátéffy Kristófnak, hogy az egyetemi éveim alatt támogattak, mindig türelmesek és megértők voltak, valamint a szakdolgozatot a leadás előtt elolvasták és építő kritikákkal segítették a munkámat.

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban az exponenciális és logaritmusfüggvény bevezetéséről, tanításáról írok, főként biológia iránt érdeklődő tanulók számára. Sokan kérdezik, hogy miért kell matematikát tanulni, ha úgyse fogják a későbbiekben használni. Én magam is ezt tapasztalom diákjaim részéről, immár harmadik éve demonstrátorként, biológus hallgatókat tanítva. Mivel biológia-matematika tanárszakos vagyok, azt gondolom, hogy a biológusoknak is nagyon fontos a matematika bizonyos területeinek megtanulása, megértése, mert munkájuk során sokat találkozhatnak olyan problémával, amelyhez szükségük van ezekre az ismeretekre. Mégis az évek során azt látom, hogy nagyon sokan félnek a matematika tanulásától, nem csak az egyetemen, hanem a középiskolás éveik során is. Érdekes megjegyezni, hogy a kicsik még nem félnek… Különösen problémát jelent az exponenciális és logaritmusfüggvény elsajátítása, pedig ezen ismeretek birtokában több biológiai folyamat sokkal könnyebben és jobban áttekinthetővé válik. Kutatásom célja ennek okának feltárása. A dolgozatot felmérésem eredményeivel kezdem, amit elsőéves biológia és gyógyszerészhallgatók körében végeztem, a matematikához való hozzáállásukkal kapcsolatban. Két kérdőívet töltettem ki a célcsoporttal, egyet a félév elején, és egyet a félév végén.

Dolgozatom további részében áttekintem a Nemzeti Alaptanterv matematikára vonatkozó részeit, valamint a matematika és biológia tantárgyak ütemezését.

Továbbá öt, a 11. évfolyamosok számára írt matematika tankönyv elemzése következik, ahol az exponenciális és logaritmusfüggvényekhez kapcsolódó részeket hasonlítom össze, több szempont alapján. A sejtésem beigazolódott, nem szerepel elegendő biológiai és élettudományi motivációval rendelkező példa és feladat ezen témakörök bevezetése kapcsán. Ebből az okból kifolyólag, ismertetem egy általam megfelelőnek tartott bevezetési módot az exponenciális és logaritmusfüggvényre, kiegészítve fakultációra bevihető, érdeklődőbb diákok számára készített tananyaggal, valamint néhány gondolatot és példát írok a logarléccel kapcsolatban, amelyet a számológép használata előtt alkalmaztak.

2. Egy felmérés eredményei

Nehéz az anyag? Rossz középiskolai matektanár? Szigor? Unalmas órák? Száraz anyag és semmi alkalmazás? Nem látják azt, hogy nekik, biológusként vagy gyógyszerészként, a pályafutásuk során hol lesz hasznos?

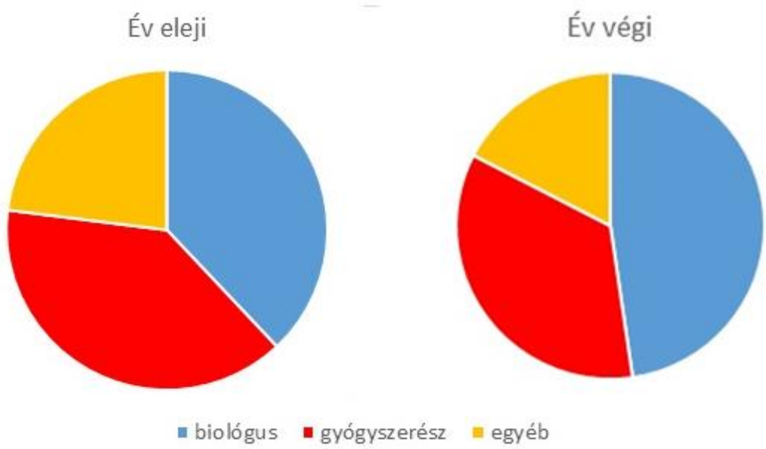
Ezekre a kérdésekre próbáltam választ kapni egy felmérés során, amit a szemeszter kezdetén és végén végeztem, biológus- és gyógyszerész-hallgatók körében.

2.1. A felmérés módszerei

A kérdőív első felében a középiskolai tapasztalatok alapján kellett 0-tól 4-es skálán osztályozni az állításokat, hogy mennyire igazak az adott hallgatóra. Majd a középiskolás versenyzési, illetve szakkörre való járás lehetőségeire kérdeztem rá. Végül pedig, az egyetemi matematika kurzussal kapcsolatos elvárásaikat, illetve előzetes érzéseiket kellett leírniuk, illetve osztályozni szintén 0-tól 4-es skálán, ahol a 0 az egyáltalán nem igaz, a 4-es pedig a teljes mértékben igazat jelenti.

A félév végén hasonló volt a kérdőív összetétele, az egyetemi kurzusról alkotott véleménnyel kiegészítve. Mennyire tartották hasznosnak, mennyire volt érdemes félni tőle, valamint, hogy mennyire szerettette meg velük a matekot, és hogy gyűjtöttek-e több tapasztalatot az alkalmazhatóságáról. Mindkét kérdőív kérdései a mellékletben megtalálhatóak.

A félév elején összesen 173 hallgató töltötte ki a kérdőívet, ennek 38%-a biológus, 39%-a gyógyszerész hallgató, és 23%-a egyéb szakra jár. A félév végén a 86 válaszadó közül 47,7%-a biológia, 34,9%-a gyógyszerész és 17,4%-a pedig egyéb szakos (1. ábra).



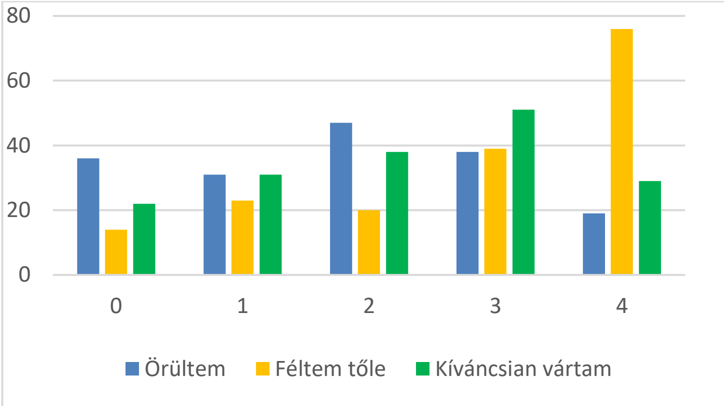
1. ábra: *Válaszolók megoszlása szakok szerint*

2.2. Félév eleji eredmények

Az eredmények alapján észrevehető az összefüggés, a középiskolai matematikaoktatás és aközött, hogy hogyan állnak hozzá a felsőbb matematikai tanulmányokhoz.

A hallgatók általános véleménye, amikor megtudták, hogy az egyetemen lesz matematika kurzusuk, a következő volt:

1. Örültem
2. Féltem tőle
3. Kíváncsian vártam

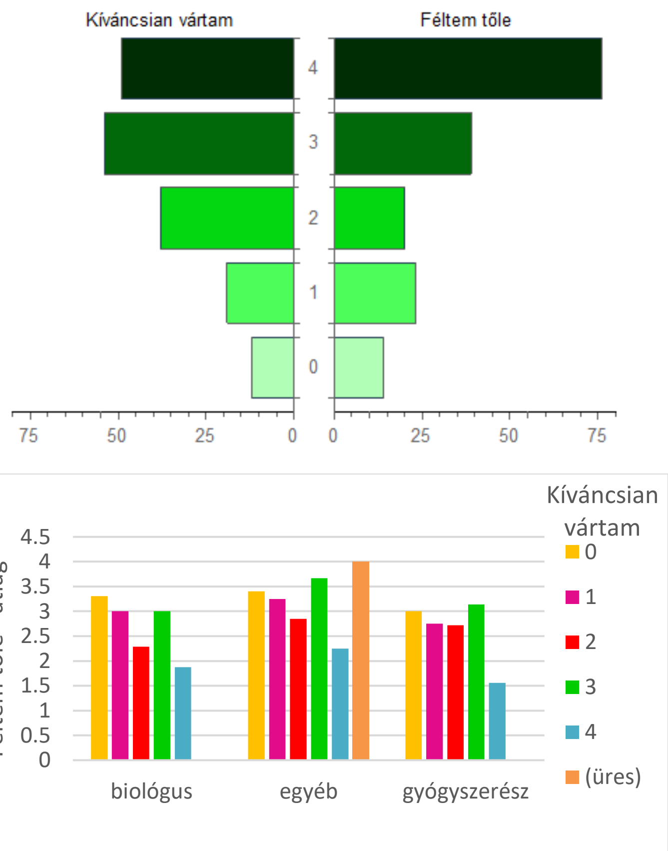


2. ábra: *,,Örültem", ,,Féltem tőle" és ,,Kíváncsian vártam"*

A hallgatók 44%-a jelölte a skálán a legmagasabb értéket, arra a kérdésre válaszolva, hogy mennyire félt az egyetemi matematika kurzustól.

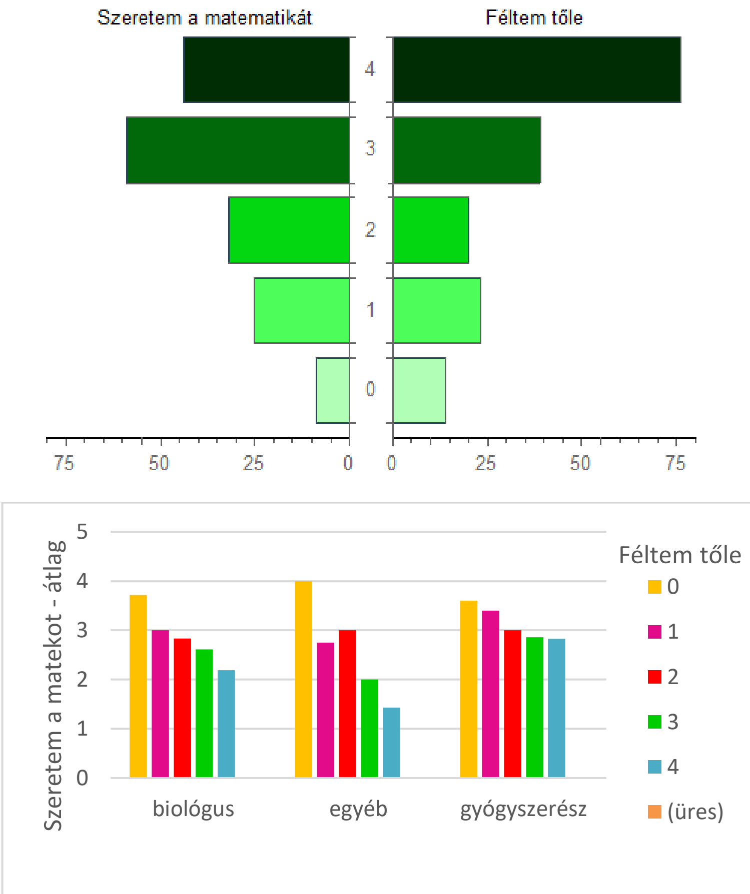
Megvizsgáltam azt is, hogy hogyan függ össze az egyes kérdésekre adott válasz.

Összehasonlítottam, hogy a hallgatók hány százaléka jelölte a legmagasabb értéket arra a kérdésre, hogy mennyire félt, amikor megtudta, hogy lesz az egyetemen is matematika kurzusa, illetve, hogy mennyire várta ezt a kurzust kíváncsian. A hallgatók 44%-a nagyon félt, vagyis a skálán a legmagasabb értéket jelölte, ennek ellenére, akik csak a hallgatók 13%-a nem várta kíváncsian (3. ábra). Összességében látható a félelem elnyomja a kíváncsiságot.



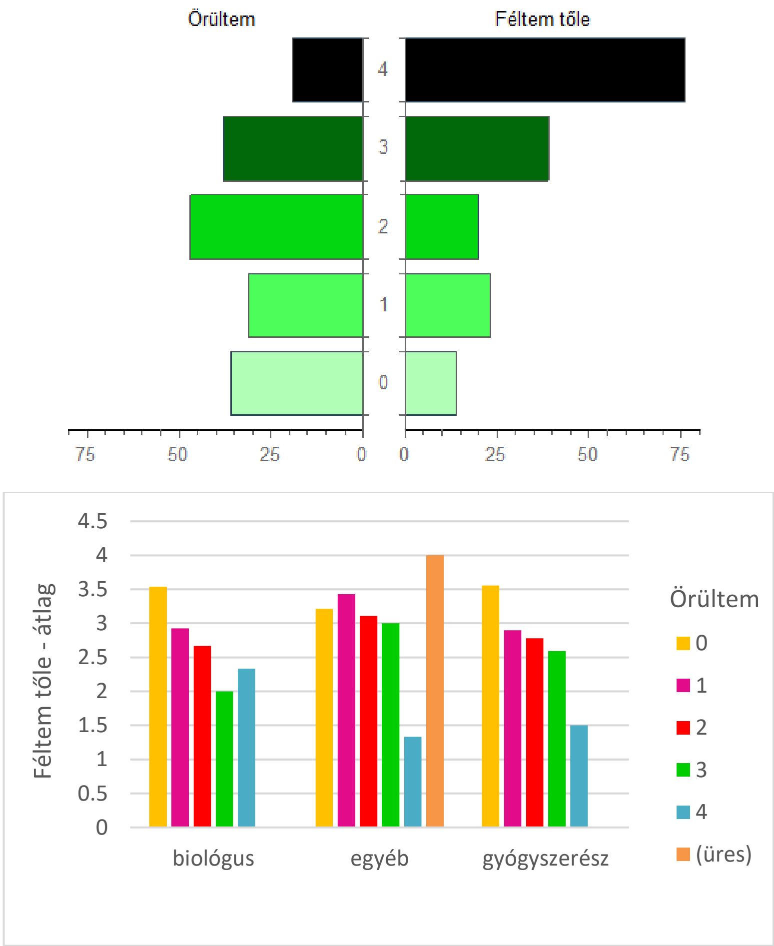
3. ábra: *,,Kíváncsian vártam"* és ,,Féltem tőle" összehasonlítása

Következő keresztpróbám során azt vizsgáltam, hogy hogyan alakul azok száma, akik középiskolás tapasztalataik alapján szeretik a matematikát, illetve azok száma, akik féltek az egyetemi matek kurzustól. Függetlenül attól, hogy a hallgatók 60%-a 3-ast és 4-est jelölt a skálán, 67% szintén 3-ast vagy 4-est jelölt arra a kérdésre is, hogy mennyire féltek, amikor megtudták, hogy az egyetemen újra matematikát kell tanulniuk (4. ábra). A félelem itt is domináns.



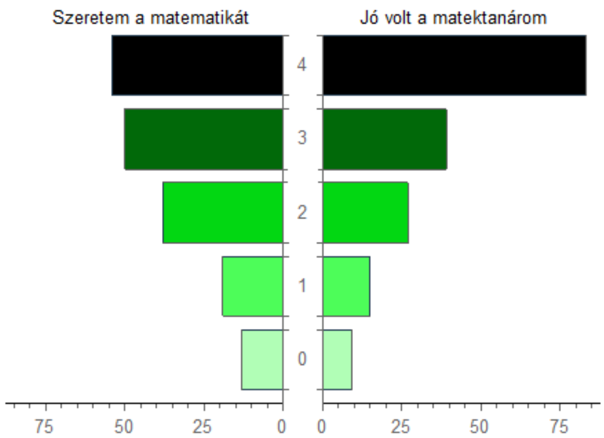
4. ábra: *„Szeretem a matematikát" és „Féltem tőle" összehasonlítása*

Azt is összehasonlítottam, hogy a hallgatók mennyire örültek, illetve mennyire féltek a matematika kurzustól. Mindössze 10% jelölte a legmagasabb szintet annál a kérdésnél, hogy örült neki, közel 30%-nak közömbös volt, míg 20% egyáltalán nem örült. Ezzel szemben, mint ahogy az előző ábránál tárgyaltam, a hallgatók 67%-a nagyon félt újra matematikát tanulni az egyetemen (5. ábra).



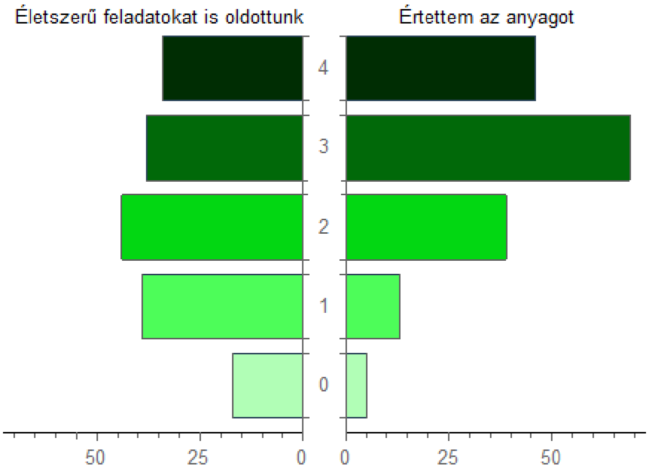
5. ábra: *„Örültem" és „Féltem tőle" összehasonlítása*

Következőnek megnéztem, hogy mennyire függ össze az, hogy valakinek milyen tanára volt középiskolában azzal, hogy mennyire szereti a matematikát a későbbiek során. (6. ábra)



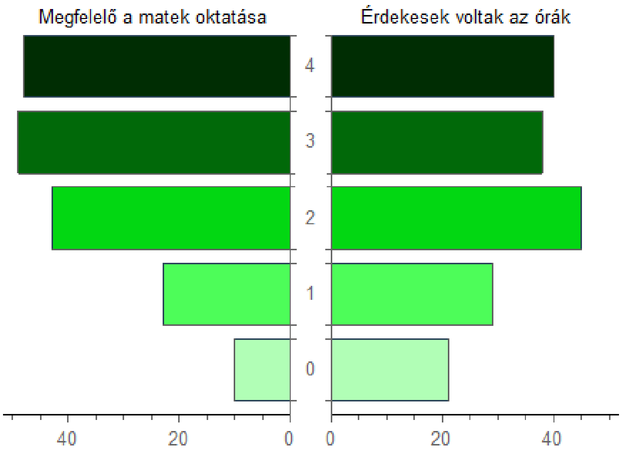
6. ábra: *„Szeretem a matematikát" és „Jó volt a tanárom" összehasonlítása*

Ahhoz, hogy a diákok jobban megértsék a matematika tantárgy összefüggéseit, lényegét, és azt, hogy miért is kell nekik matekot tanulniuk, elengedhetetlen, hogy életszerű feladatokat is oldjanak meg órán, az az beszéljenek a matematika alkalmazási területeiről is. A megkérdezett hallgatók körében a 7. ábra mutatja a válaszok alakulását ezekkel a kérdésekkel kapcsolatban.



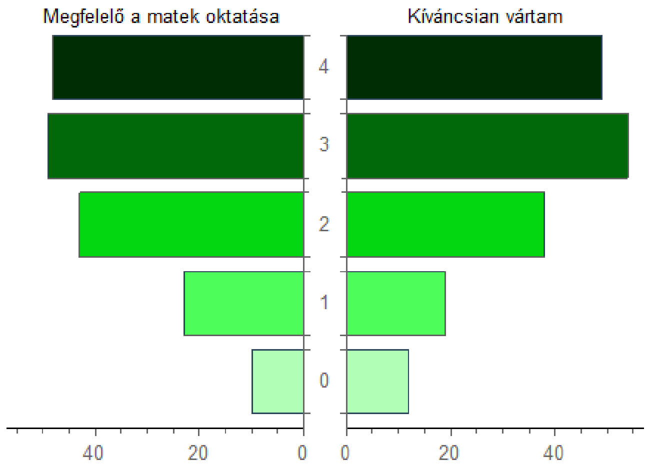
7. ábra: *„Életszerű feladatokat is oldottunk" és „Értettem az anyagot" összehasonlítása*

Következőnek azt hasonlítottam össze, hogy annak függvényében, hogy a hallgatók szerint mennyire megfelelő a matematika oktatása a középiskolában, milyen válaszokat adtak arra a kérdésre, hogy mennyire tartották érdekesnek eddigi tanulmányaik során a matekórákat. A válaszadók 58 %-a jelölte 3-as illetve 4-es szinten megfelelőnek a matek oktatását a tapasztalatuk szerint, valamint a hallgatók 45% gondolta érdekesnek 3-as illetve 4-es szinten ezeket az órákat a középiskolában (8. ábra).



8. ábra: *„Megfelelő a matek oktatása" és „Érdekesek voltak az órák" összehasonlítása*

Azt is megnéztem, hogy hogyan alakul azok száma, akik kíváncsian várták az egyetemi matematika kurzust, azoknak a számához képest, akik megfelelőnek tartják a középiskolai matekoktatást (10. ábra).



9. ábra: *„Megfelelő a matekoktatása" és „Kíváncsian vártam"összehasonlítása*

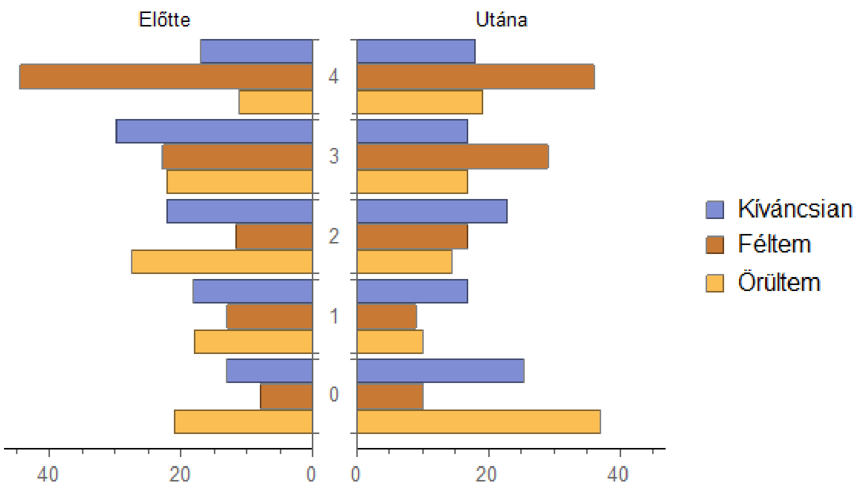
Összességében elmondhatom, hogy a legtöbb hallgató, ha negatívan állt hozzá az egyetemi matematika kurzusához, akkor annak hátterében középiskolai rossz tapasztalatok is meghúzódnak. Céltalannak látják, hogy ők továbbra is matematikát tanuljanak.

2.3. Eredmények a félév végén

Az év végi kérdőívben ismét szerepelt a következő 3 kérdés, arra vonatkozóan, hogy emlékeik szerint mit gondoltak, amikor megtudták, hogy lesz az egyetemen matematika kurzusuk:

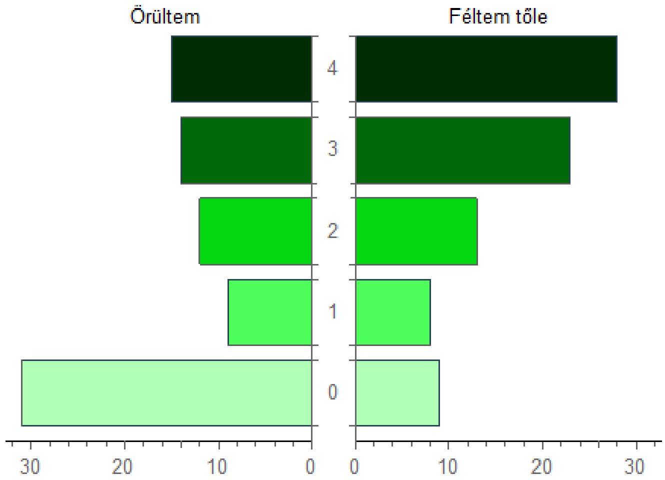
1. Örültem
2. Féltem tőle
3. Kíváncsian vártam

Összehasonlíthatók az eredmények, amelyek szeptemberben, illetve decemberben születtek.



10. ábra: *Év eleji és év végi kérdőívek összehasonlítása*

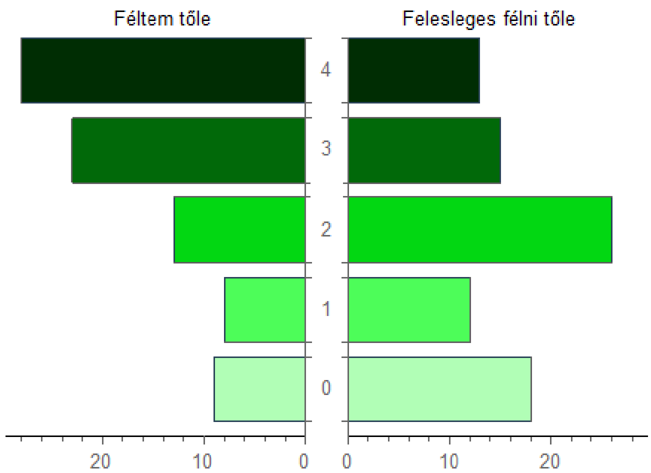
Összehasonlítottam, hogy hogyan alakul azok száma, akik a legmagasabb értéket jelölték arra a kérdésre, hogy emlékeik szerint mennyire féltek a kurzustól, illetve azok száma, akik a legalacsonyabb értéket jelölték arra, hogy emlékeik szerint mennyire örültek, hogy újra matematikát kell tanulniuk az egyetemen. Ez a két csoport egyedszáma közel azonos, és a válaszolók 35%-át teszi ki (11. ábra).



11. ábra: *„Örültem" és „Féltem tőle" összehasonlítása*

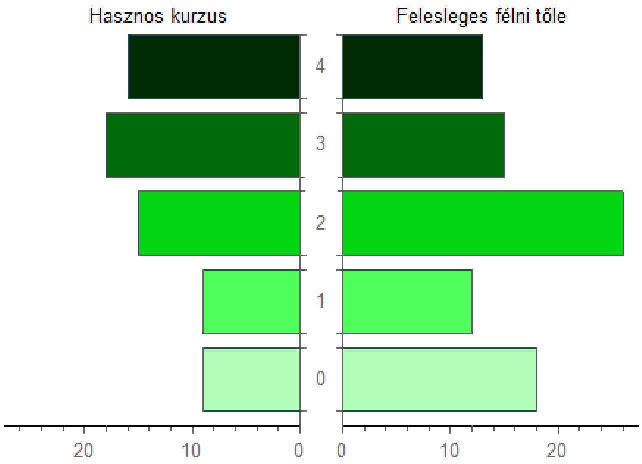
A kérdőív következő részében a kurzus utáni véleményükre kérdeztem rá, majd hasonlítottam össze az előzetes elvárásaikkal, félelmeikkel.

Szeptemberben a válaszoló hallgatók 36%-a teljes mértékben félt a matematika kurzustól, viszont csak 22% gondolta a kurzus befejezésével, hogy valóban ennyire kell félni tőle, és 15% szerint abszolút felesleges félni az egyetemi matematika kurzustól (12. ábra).



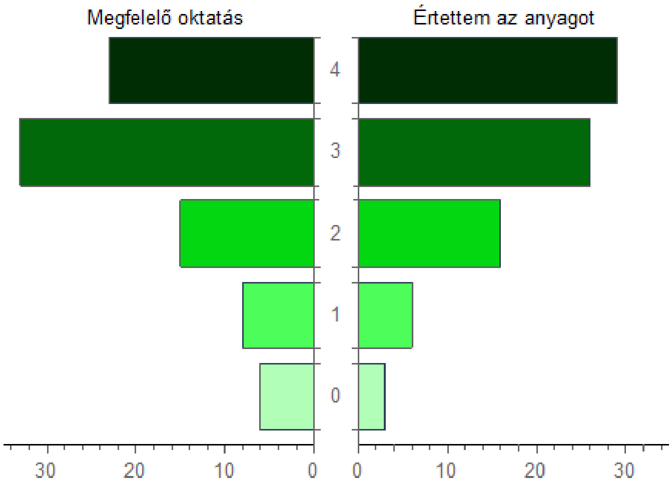
12. ábra: *„Féltem tőle" és „Felesleges félni" összehasonlítása*

A hallgatók 45%-a a két legmagasabb értéket jelölte a kurzus hasznosságára, annak ellenére, hogy csak 33% gondolja ugyanilyen mértékben, hogy felesleges félni ettől a kurzustól (13. ábra).



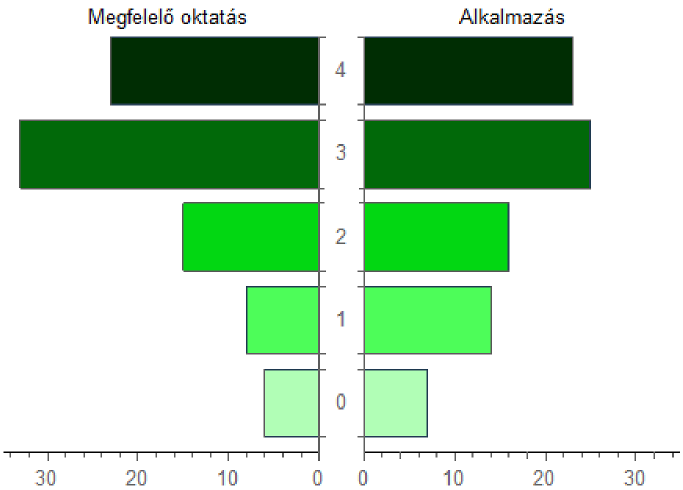
13. ábra: *„Hasznos kurzus" és „Felesleges félni tőle" összehasonlítása*

Az első kérdőívhez hasonlóan, ebben is szerepelt az oktatás minőségére vonatkozó kérdés, viszont ebben az esetben az egyetemre vonatkozóan. A válaszoló hallgatók 65%-a gondolja 3-as és 4-es szinten, hogy megfelelő a matematika oktatása az egyetemen, és ezzel összhangban 72% értette 3-as illetve 4-es szinten a matematika kurzus anyagát (14. ábra).



14. ábra: *„Megfelelő oktatás" és „Értettem az anyagot" összehasonlítása*

Hasonló módon, mint a középiskolában, az egyetemen is nagyon fontos a matematika alkalmazásáról beszélni, hogy a hallgatók tudják, hogy miért van nekik arra szükségük, hogy az adott kurzuson a megfelelő tudást elsajátítsák. A következő grafikonon azt néztem meg, hogy milyen arányban gondolják a hallgatók, hogy az egyetemen megfelelően oktatják a matekot, valamint, hogy mennyit hallanak az alkalmazhatóságáról (15. ábra).



15. ábra: *,,Megfelelő oktatás" és ,,Alkalmazás" összehasonlítása*

Összegezve, annak ellenére, hogy nagyon sokan félve és kétségekkel teli álltak hozzá az egyetemi matematika kurzushoz, többen belátták, hogy megfelelő oktatás mellett, gyakorlati alkalmazásról is beszélve, megtanulható és alkalmazható a matematikai tudás, még olyan területeken is, ahol nem is számítottak rá.

3. Tantárgyi tematikák áttekintése

A fő cél elérése érdekében, hogy megfelelően tudjunk egyes matematikai anyagrészeket tanítani, át kell tekinteni, hogy mit mond ki a Nemzeti Alaptanterv a matematikával kapcsolatos ismeretek elsajátításáról, milyen kompetenciákat kell fejleszteni az órák során, és hogy milyen követelményeket kell teljesíteniük a diákoknak, valamint van-e összhang a matematika és a biológia tanítása között. A dolgozatomhoz a 2012-ben elfogadott NAT dokumentumot használom. [7]

3.1. A NAT (2012) matematikára vonatkozó része

A Nemzeti alaptanterv meghatározza műveltségi területenként a közvetítendő műveltség fő területeit, az iskolában elsajátítandó műveltségi alapokat, az iskolai nevelésoktatás közös értékeit, iránymutatást nyújt a tanítandó témákról, a fejlesztendő területekről.

A matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról, mint komplex tudásrendszerről, mint sajátos emberi megismerési tevékenységről, szellemi magatartásról, mindezt a megfelelő nevelő és gondolkodásra tanító funkciók ellátásával. A matematikatanítás ezen kívül formálja és gazdagítja a személyiséget is.

A matematikatanítás feladata a matematika megjelenésének különböző formáinak az ismertetése:

- kulturális örökség, gondolkodásmód, alkotó tevékenység,
- a gondolkodás örömének forrása, a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és
- esztétikum megjelenítője, maga is tudomány, egyben egyéb tudományok és az iskolai tantárgyak segítője, a mindennapi élet és a szakmák eszköze.

A matematika egyszerre több kulcskompetenciát is képes fejleszteni, ezért minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Egy osztályon belül fontos figyelembe venni a tanulók képességeit, motivációját, érdeklődését, valamint a pályaorientációjukat, és ezeknek megfelelően kell megválasztani a módszereket és a pontos tananyagot.

A kulcskompetenciáknak megfelelően a matematikatanítás legfontosabb feladata a biztos számolási készség kialakítása, de nagy figyelmet kell fordítani a kommunikációs készség fejlesztésére, valamint arra, hogy a tanulók ki tudják választani a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, módszereket, gondolkodásmódokat és alkalmazni is tudják azokat.

A matematika fejlesztési területei:

1. Tájékozódás
   1.1. Tájékozódás a térben
   1.2. Tájékozódás az időben
   1.3. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban

2. Megismerés
    2.1. Tapasztalatszerzés
    2.2. Képzelet
    2.3. Emlékezés
    2.4. Gondolkodás
    2.5. Ismeretek rendszerezése
    2.6. Ismerethordozók használata
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés és - megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott
6. feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
7. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek
    7.1. Kommunikáció
    7.2. Együttműködés
    7.3. Motiváltság
    7.4. Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás
8. 7. A matematika épülésének elvei

Az exponenciális és logaritmus függvények a 11. osztályban jelennek meg.

3.2. A Biológia és Matematika tárgyak ütemezése

A következő táblázatban összefoglalom, hogy biológia tantárgy ütemezésében mely anyagrészekhez lehet hozzákötni a matematika egyes területeit, illetve milyen matematikai készségekkel kellene rendelkezniük a diákoknak az adott részek tanulásakor, hogy teljes mértékben megérthessék és elsajátíthassák a biológia tantárgy tananyagát.

Biológia	Matematika
9-10. évfolyam	
Praktikus és fejlődéstörténeti csoportosítás. A rendszerezés lehetséges szempontjai, gyakorlati alkalmazása a mindennapokban.	Halmazok, unió, metszet fogalma, alkalmazása, rendszertani kategóriák felosztás.
Egyed feletti szerveződési szintek leírására szolgáló néhány módszer. A populáció és életközösség (társulás) fogalma, jellemzői. A biológiai (ökológiai) indukáció. Populáción belüli és populációk közti kölcsönhatások: a szabályozás megvalósulása a populációk és a társulások szintjén. Az életközösségek vízszintes és függőleges elrendeződésének okai.	Modellezés gráfokkal, teljes gráf, egyszerű gráf, fagráf, körgráf fogalma, út, séta jelentése a gráfban. Függvények, függvények ábrázolása, tengelyek elnevezése. Statisztikai elemzések: átlag, medián, módusz, szórás jelentése és használata

Példák az életközösségekben zajló anyagkörforgásra (szén, nitrogén), az anyag és energiaforgalom összefüggésére. Táplálékpiramis (termelő-, fogyasztó-, lebontó szervezetek). Táplálkozási hálózatok (biológiai produkció, biomassza). Gyöngyvirágtól lombhullásig: ciklikus folyamatok. Beerdősülés és leromlás: egyirányú változások. Járványok, hernyórágás: véletlenszerű és kaotikus létszámingadozások.	
Néhány jellemző hazai társulás (táj, életközösség) és állapotuk. A Kárpát-medence természeti képének, tájainak néhány fontos átalakulása az emberi gazdálkodás következtében. Tartósan fenntartható gazdálkodás és pusztító beavatkozások hazai példái. A természetvédelem hazai lehetőségei, a biodiverzitás fenntartásának módjai. Az emberi tevékenység életközösségekre gyakorolt hatása, a veszélyeztetettség formái és a védelem lehetőségei.	Grafikonok elemzése, statisztikai kimutatások és mérések elemzése.
11-12. évfolyam	
A víz biológiai szempontból fontos jellemzői. A sejtek víztartalma. A környezeti koncentráció hatása. A sejthártya áteresztőképessége, transzportfolyamatok. A sugárzások és az életlehetőségek közötti összefüggések (fototrófia, UV-védelem). Biogén elemek, nyomelemek. Az élő rendszereket felépítő szerves anyagok fontosabb típusai, sajátos biológiai funkciói. Az enzimműködés lényege. A sejtkárosító hatások főbb típusai, lehetséges forrásaik (nehézfémek, mérgek, maró anyagok, sugárzások, hőhatás). A biológiai folyamatok energetikai összefüggései; a lebontó és a felépítő anyagcsere jellemzői. Az energia elsődleges forrása. A folyamatok alapegyenlete, szakaszai, energia- és anyagmérlege, helye a sejten belül. A sejtmembrán jelforgalmi fehérjéi. A sejtek közötti fizikai kapcsolatok formái. A kémiai kommunikáció lehetősége. A membránfelszínt csökkentő és növelő folyamatok szerepe.	Hossz-, terület-, felszín-, térfogatszámítás; mértékegységek, átváltások; nagyságrendek; halmazok használata, osztályokba sorolás, rendezés. Grafikonok, függvények elemzése, tengelyek megfelelő megnevezése.

A normál testsúly. A túlsúly és elhízás következményei, és emelkedő kockázatuk. A tápanyagok fajlagos energiatartalma.	Statisztikai elemzések: átlagérték, szórás, módusz, medián használata.
A testi jellegek népcsoporton belüli eltérései, átlagértékek és szélsőségek	Szimmetria; alá- és fölérendeltségi viszony; mellérendeltség
Mendel módszereinek, eredményeinek és ezek érvényességi körének értelmezése. Öröklött jelleg megjelenésének számszerű megadása (az öröklésmenet ismeretében). Következtetés allélkölcsönhatásra (az eloszlás ismeretében). Családfa elemzése. Ikervizsgálatok értelmezése. Kockázati tényező és elővigyázatosság értelmezése genetikai példán. Minőségi és mennyiségi jelleg megkülönböztetése. Mennyiségi eloszlás grafikus megjelenítésének értelmezése.	Valószínűségszámítás eszközeinek alkalmazása, eloszlás, eloszlásfüggvények ismerete.

A következő táblázatban a matematika tantárgy ütemezését vettem alapul, mellé pedig azt írtam, hogy a biológia mely területén használható a matematika területén megszerzett tudás.

Matematika	Biológia
9-10. évfolyam	
Részhalmaz. Halmazműveletek: unió, metszet, különbség. Halmazok közötti viszonyok megjelenítése.	Halmazműveletek alkalmazása a rendszertanban.
Alaphalmaz és komplementer halmaz.	Élőlények osztályozása; besorolás közös rész nélküli halmazokba.
Számok normálalakja.	Tér, idő, nagyságrendek – méretek és nagyságrendek becslése és számítása az atomok méreteitől az ismert világ méretéig; szennyezés, környezetvédelem.
Szöveges számítási feladatok a természettudományokból, a mindennapokból.	Számítási feladatok.
Egyszerű feladatok polinomok, illetve algebrai törtek közötti műveletekre. Tanult azonosságok alkalmazása. Algebrai tört értelmezési tartománya. Algebrai kifejezések egyszerűbb alakra hozása.	Számítási feladatok.
A függvény megadása, elemi tulajdonságai.	Időben lejátszódó folyamatok leírása, elemzése.
Egyenlet, egyenletrendszer grafikus megoldása.	Számítási feladatok.
Egybevágóság, szimmetria.	Az emberi test síkjai, szimmetriája.
Hasonló testek felszínének, térfogatának aránya.	Példák arra, amikor adott térfogathoz nagy felület (pl. fák levelei) tartozik.

Véletlen esemény és bekövetkezésének esélye, valószínűsége.	Öröklés, mutáció.
11-12. évfolyam	
Vegyes kombinatorikai feladatok, kiválasztási feladatok. A kombinatorika alkalmazása egyszerű geometriai feladatokban. Mintavétel visszatevés nélkül és visszatevéssel.	Genetika, allélok gyakorisága, eloszlása. Öröklődések valószínűsége.
A definíciók és a hatványozás azonosságainak közvetlen alkalmazásával megoldható exponenciális egyenletek.	Globális problémák, demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás.
A definíciók és a logaritmus azonosságainak közvetlen alkalmazásával megoldható logaritmusos egyenletek.	Populációmodellek, érzékelés, az inger és az érzet.
Mértani sorozat, az n. tag, az első n tag összege.	Exponenciális folyamatok vizsgálata.
Algebrai azonosságok, hatványozás azonosságai, logaritmus azonosságai, trigonometrikus azonosságok.	Képletek használata.
Egyenletekre, egyenlőtlenségekre vezető gyakorlati életből vett és szöveges feladatok.	Matematikai modellek.
Gyakoriság, relatív gyakoriság. Véletlen esemény valószínűsége. A valószínűség kiszámítása a klasszikus modell alapján. A véletlen törvényszerűségei.	Szenvedélybetegségek és rizikófaktor.

Az összehasonlító táblázatok alapján, amelyek alapját a kerettanterv képezi, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a tantárgyak nem mindig vannak szinkronban egymással, vagyis több esetben is olyan ismereteket kellene a matematikából alkalmazni, amelyekre csak később kerül sor a középiskola során. Néhány biológiában használatos matematikai modellt sokkal jobban meg tudnának a diákok érteni, ha akkor már meglennénk az ehhez szükséges alapismereteik. Ilyen például az exponenciális függvény. Biológiában ez már korábban előkerül a populációk közötti kölcsönhatás, valamit járványok és populációingadozásának megfigyeléskor. Azonban elég nehéz úgy a kellő mélységig megérteni ezeket a folyamatokat, ha magát a függvényt, amely leírja ezeket a változásokat, még nem ismerik a diákok.

Ezen célszerű lenne változtatni, valamint jobban figyelembe kellene venni a tantárgyak anyagának előrehaladását, és úgy kialakítani az egyes tanterveket.

3.3. Az exponenciális és logaritmus függvények tárgyalása néhány tankönyvben

Ebben a fejezetben az alábbi magyarországi és egy szerbiai 11. osztályosoknak íródott tankönyvek exponenciális és logaritmus függvénnyel foglalkozó részét hasonlítom össze:

- Csordás Mihály, Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János Dr., Vincze István: Sokszínű matematika 11, Mozaik Kiadó (Később: Sokszínű matematika 11) [1]
- Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika 11, Nemzeti Tankönyvkiadó (Később: Matematika 11) [2]
- Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Dr. Simon Judit: Matematika 11, Az érthető matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó (Később: Az érthető matematika) [3]
- Dömel András, Korányi Erzsébet, Marosvári Péter: Matematika 11, Kísérleti tankönyv, Nemzeti Tankönyvkiadó (Matematika 11, Kísérleti tankönyv) [4]
- Csikós Pajor Gizella, Dr. Péics Hajnalka: Analízis (Később: Analízis jegyzet) [5]

A következők képezik az összehasonlítás alapját:

- Van-e motiváló feladat az elején
- Definíció megfogalmazása
- Alkalmazások, feladatok

3.3.1. Sokszínű matematika 11 [1]

Az exponenciális függvény bevezetését az egész kitevős hatvány ismétlése előzi meg, majd a hatványozás kiterjesztéseként vezeti be az exponenciális függvényt, motiváló feladat nélkül.

Definíció:

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x, a > 0$, függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

Az exponenciális függvény tulajdonságait példákon keresztül szemlélteti, de nem szedi pontokba. A fejezet két alkalmazási feladatot tartalmaz. Az egyik a légnyomás változásáról, a másik pedig radioaktív bomlásról szól, mindkettőnek szerepel a feladat szövege után a megoldása is.

A logaritmus bevezetéséhez egy baktériumszaporodási modellt mutat be, és azon magyarázza el a logaritmus fogalmát.

Definíció:

A b szám a alapú logaritmusa az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapunk, ahol

$a > 0, \quad a \neq 1$ és $b > 0$.

Jele: $log_a b$.

Külön tárgyalja a 10-es alapú logaritmus és az „*e*” alapú (természetes) logaritmus jelölését.

Itt felmerülhet a kérdés, hogy egyáltalán mi az az ,,*e*” szám? Korábban az exponenciális kifejezéseknél csak megemlítésként szerepelt, miszerint az „*e*” egy irracionális szám, melynek közelítő értéke 2,7183.

A logaritmus gyakorlati alkalmazásairól egy külön fejezet szól, ahol négy kidolgozott példa található. Az első egy hőmérséklet változásáról szóló feladat, a második egy gazdasági problémát vet fel. A harmadik példa egy radioaktív bomlást ír le, míg a negyedik a népesség egy bizonyos részének a növekedését becsüli meg előzetes adatok alapján.

3.3.2. Matematika 11 [2]

Az exponenciális függvényt bevezető fejezetet a törtkitevőjű hatvány ismertetése előzi meg.

Ebben a fejezetben először is kiterjeszti a hatványfogalmat a racionális számokra, amelyet egy számpéldával tesz meg, majd az irracionális számokra is kiterjeszti a hatványfogalmat. Itt a becslés módszerét alkalmazza. Majd végül megismerkedik az exponenciális függvénnyel. Konkrét definíciót nem ad rá, csak a következő szerepel:

> *Ezzel már minden valós x-re értelmezni tudjuk 2^x hatványt, és megkapjuk az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény grafikus képét.*
>
> *Természetesen ugyanígy járhatunk el tetszőleges $a > 1$ valós szám esetén, ha az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ függvényt akarjuk szemléltetni.*

Megemlíti azt az esetet is, amikor az alap 1-gyel egyenlő. Ezután következnek az exponenciális függvény tulajdonságai, de nincsenek külön pontokban összefoglalva.

Az alkalmazás bemutatására egy hasonló légnyomásról szóló példát tartalmaz, mint a Mozaikos tankönyv.

A logaritmus fogalmát nem életszerű példával magyarázza. Fő kérdés: ,,Mennyivel egyenlő az x, ha $2^x = 6$?"

,,x az a hatványkitevő, melyre 2-t emelve 6-ot kapunk."

A logaritmus fogalmát a következőképp definiálja:

Definíció:

> *Legyenek $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$ valós számok.*
>
> *$log_a b$ (olvasd: a alapú logaritmus b) jelenti azt a hatványkitevőt, melyre a-t emelve b-t kapunk.*

Hasonló módon, mint a Mozaikos tankönyv, külön tárgyalja a 10-es és az *„e"* alapú logaritmus jelölését, viszont alkalmazásról szóló gyakorlati példák nincsenek.

3.3.3. Az érthető matematika [3]

Ez a könyvszintén a hatványfogalom kiterjesztésével, a permanenciaelvnek megfelelően vezeti be az exponenciális függvényt, motiváló feladat nélkül. A következőképp definiálja:

Definíció:

> *Azokat a függvényeket, amelyekben a változó a kitevőben szerepel, exponenciális függvényeknek nevezzük. Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, a>0 függvény az "a" alapú exponenciális függvény.*

A függvény tulajdonságai pontokba vannak szedve, de alkalmazási feladatok nem szerepelnek.

A logaritmus fogalmát egy kamatos kamat számításának példáján vezeti be, majd általánosítás után mondja ki a definíciót:

Definíció:

> *A b szám a alapú ($a > 0$ és $a \neq 1$) logaritmusának nevezzük azt a kitevőt, amelyre a-t emelve b-t kapunk.*

A kitevő jelölése: $\log_a b$. (Kiolvasása: a alapú logaritmus b)

Tehát a definíció szerint:$a^{\log_a b} = b$.

Ha a logaritmus alapja 10, akkor rövidebb jelölést használunk: $log_{10}b$ helyett lgb–t írunk.

Szerintem hasznos, hogy a definíciót leírja képlet alakjában is, mert így könnyebb a diákoknak elképzelni, hogy miről is van szó.

A 10-es és a természetes alapú logaritmusról még megjegyzésben ejt szót, majd utal egy néhány oldallal későbbi olvasmányra, ahol jobban részletezi.

Alkalmazásról is bőven van szó, mind a természetből és társadalomból, illetve gyakorlatból is. Többek között található a radioaktív bomlással kapcsolatos feladat, kamatos kamatszámítás, hangintenzitás, hangnyomásszint és népesség csökkenésével kapcsolatos példa. Végezetül pedig közép- és emelt szintű érettségi feladatok ehhez a témához kapcsolódó gyűjteménye található.

3.3.4. Matematika 11, Kísérleti tankönyv [4]

A könyv számológépes kísérletezéssel kezd, de nem vesz elő semmilyen hétköznapi vagy alkalmazási példát, majd utána tér rá a hatványfogalom kiterjesztésére. Szerintem sokkal érthetőbb lenne, ha nem csak a számológéppel számolgatna, hanem egy szemléletes, életszerű példával vezetné be az exponenciális függvényt. Kiterjesztés során először a kettes alapú exponenciális függvényt nevezi meg, illetve annak tulajdonságait, utána pedig az *„a”* alapú exponenciális függvény definiálja:

Definíció:

> *Ha a pozitív szám, de nem egyenlő 1-gyel, akkor a valós számok halmazán értelmezett $x \to a^x$ hozzárendelési szabályú függvényt a-alapú exponenciális függvénynek nevezzük.*

Ahogy az *Érthető matematika* tankönyvben is, ebben is közvetlenül a definíció után az exponenciális függvény tulajdonságait tárgyalja a szerző, viszont ez után több alkalmazási feladat is következik, némelyik kidolgozva, néhány pedig megoldás nélkül szerepel. Az utóbbiak között szerepelnek egyszerű matematikai készséget ellenőrző feladatok, viszont megjelenik biológiai vonatkozású alkalmazás is, az E. coli baktérium osztódásával kapcsolatban. Másik példában a népesség csökkenésére ad exponenciális összefüggést. Kidolgozott feladatként pedig egy gyógyszerürülési folyamatot ír le, ahol az egyik alpontban a felezési idő is megjelenik. A könyv kidolgoz még egy radioaktív bomlási feladatot is. A házi feladat részben több, a megoldott példához hasonló feladatok találhatóak.

A logaritmus fogalma ez a tankönyv esetén se életszerű példán kerül bevezetésre, hanem exponenciális egyenlet megoldásával. A későbbiekben is sokkal kevesebb alkalmazási példa található. A definíciót röviden, képlettel adja meg:

Definíció:

$$a^{log_a b} = b, ahol\ a > 0, a \neq 1, és\ b > 0.$$

A logaritmusfüggvény alkalmazásánál találhatunk még néhány életszerű példát, amelyek a földrengés erősségét mérő szeizmográffal és pH-számítással kapcsolatosak. Viszont többségben az egyszerű matematikai készségek használatát igénylő feladatok szerepelnek.

3.3.5. Analízis jegyzet [5]

A könyv a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium és Kollégium matematika tagozatos diákjainak íródott, rögtön az exponenciális függvény definíciójával kezd:

Definíció:

Exponenciális függvénynek nevezzük azt az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *valós függvényt, amelyet az* $f(x) = a^x,\ \ x\epsilon\mathbb{R}$ *hozzárendelési szabállyal adunk meg, ahol* $a > 1$ *és* $a \neq 1$.

Az exponenciális függvény tulajdonságait nyolc pontban sorolja fel. Alkalmazást nem említ, az elméleti rész után sablonszerű feladatok vannak.

A logaritmus fogalmát külön nem tárgyalja, hanem rögtön a logaritmusfüggvény definiálja:

Definíció:

Logaritmusfüggvénynek nevezzük azt az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *valós függvényt, amelyet az*

$$f(x) = log_a x, x\epsilon\mathbb{R}^+$$

Hozzárendelési szabállyal adunk meg, ahol $a > 0$ *és* $a \neq 1$.

A definíció után a logaritmusfüggvény tulajdonságai vannak pontokba szedve.

3.4. Összegzés, elemzés

Összességében minden tankönyvben szerepel az exponenciális és logaritmusfüggvény bevezetése, definíciója. Az alkalmazásról szóló részek a Matematika 11, illetve az Analízis jegyzet esetén hiányosak, ellentétben a Kísérleti tankönyvvel, ahol az egész könnyűektől a nehéz példákig, sok feladat szerepel. A legtöbb és legérdekesebb ábrát a Sokszínű matematika tankönyv tartalmazza, amelyek jól segítik a tananyag megértését. Amellett, hogy több tankönyvben is szerepel alkalmazási feladat, és a Kísérleti tankönyv még biológiai motivációjú példát is említ, egyik se azon keresztül vezeti be az exponenciális és a logaritmus függvény fogalmát. Véleményem szerint, ha egy életszerű, alkalmazáson keresztül ismerkednek meg a diákok ezekkel a fogalmakkal, függvényekkel, akkor jobban érthető lesz számukra, hogy miről is van szó, és jobban meg tudják jegyezni a velük kapcsolatos ismereteket. Érdemes lenne még az exponenciális függvénnyel egy időben megemlíteni a mértani sorozatokat, mivel a mértani sorozatokat felírhatók exponenciális függvény segítségével, illetve fordítva, viszont ennek a tananyagnak a tárgyalására csak 12. osztályban kerül sor. Személyes tapasztalatom alapján ekkor már nem tudják a diákok a két témakört összekötni. A tankönyvek többségében hiányzik, hogy a logaritmus képlettel is fel legyen írva, leginkább csak a szöveges definíció szerepel. Hiányzik a tankönyvekből a logaritmus és az exponenciális függvény kapcsolata, vagyis, hogy egymás inverzei. A logaritmust könnyen be lehet vezetni egy exponenciális függvényen keresztül egy egyszerű kérdéssel: ,,Hol veszi fel az adott exponenciális függvény a következő értéket?”

4. Érettségi feladatok az exponenciális és logaritmus függvény témaköréből

Ebben a fejezetben 2005-től kezdődően a közép és emeltszintű érettségi feladatsorokat néztem át, azt vizsgálva, hogy milyen jellegű és nehézségű feladatokat tartalmaznak ebben a témakörben. A kigyűjtött feladatok a mellékletben találhatóak, ahol azt is feltüntettem, hogy hány pontot érnek, vagyis milyen nehézségűnek találják az érettségi összeállítói.

4.1. A közép- és emeltszintű érettségi feladatok típusainak összefoglalása

A középszintű érettségi feladatok között a legtöbb az alkalmazási feladatok közül szerepel, ahol nem csak matematikai jellegű ismereteket kell felhasználni, hanem előkerül a fizikában megjelenő összefüggések is, valamint a mindennapi életből vett gyakorlati példák, többek között a kamatos kamatszámítás, amelyek exponenciális vagy logaritmikus összefüggéseket írnak le. Ezek a feladatok legtöbbször az érettségi második felében jelennek meg, a választható feladatok között, tehát a diákok nincsenek rákényszerítve, hogy megoldják őket.

Ezzel szemben az emeltszintű érettségi feladataiban már sokkal kevesebb alkalmazásról szóló feladat található, azok is inkább csak a kamatos kamat számításának problémáját veszik elő.

Ábrázolásról szóló feladat igen kevés esetben jelenik meg mindkét szinten.

Exponenciális és logaritmikus egyenletekből is elég sok feladat szerepel mind a közép- mind az emeltszintű érettségiben, viszont exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenség és egyenletrendszer pedig főként csak emelt szinten fordul elő.

A logaritmus definíciójára és azonosságaira alapuló feladatok középszinten, a feladatsor elején találhatók, általában nem sok pontot érő egységként. Ezek a típusú feladatok az emeltszintű érettségiből hiányoznak.

Az általam elemzett tankönyvek közül a Sokszínű matematika és a Matematika 11, Kísérleti tankönyv készít fel legjobban, különösen az középszintű érettségire, mert ezekben található a legtöbb kidolgozott példa, valamint a többi tankönyvhöz képest a legtöbb exponenciális és a logaritmus függvény alkalmazásáról szóló feladat is, amelyek az érettségiben nagy számban előfordulnak.

Véleményem szerint túl sok a tiszta matematikai készséget ellenőrző feladat ezekből a témakörökből mindkét szinten, és különösen az emeltszintű feladatsor tartalmazhatnak több gyakorlati feladatot is, amelyek nem csak a gazdasági vonatkozású illetve fizikai összefüggéseket leíró feladatok köréből kerülnek ki, hanem tartalmaznak biológiai, élettani, illetve gyógyszerészeti vonatkozást is.

5. Az exponenciális és logaritmusfüggvények tanítása élettudományi szakos tanulók számára

Az exponenciális és logaritmusfüggvény az egyik legfontosabb függvények közé tartoznak a matematikában, ezen kívül sok alkalmazását is meg tudjuk említeni, akár az élettudományok, biológia terén. Azonban kevesen tudnak ezekről a felhasználási területekről, mivel az iskolában csak be van vezetve, használják, számolnak vele matematika órán, egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket, de konkrét példa nem nagyon szerepel az oktatásban. Pedig sokkal nagyobb érdeklődést, odafigyelést lehetne kiváltani, ha a diákok, látnák a matematikában tanultak hasznát, alkalmazási lehetőségeit, és hogy miért fontos nekik, hogy ezeket megfelelően elsajátítsák. Ezért szakdolgozatom fő részét ezen két témakör bevezetésének lehetősége képezi. A fogalmak bevezetése előtt mindenképp fontosnak tartom, hogy egy gyakorlati példán ismertessük a gyerekekkel, amiről tanulni fognak. Könnyebben megjegyzik, valamint jobban le tudjuk kötni őket. Majd csak ez után kell definiálni, hogy mi is az az exponenciális- és logaritmus függvény. A számolási készséget és a definíciót gyakoroltató példák mellett fontosnak tartom, hogy számos gyakorlati feladattal is találkozzanak a diákok, így egy későbbi alfejezetben erre is hozok példákat. Több matematikai fogalom is kapcsolódik ezekhez a témakörökhöz, mint például mértani sorozatok, felezési idő, duplázódási idő. Ezekről a fogalmakról is lesz szó a későbbiekben.

5.1. Az exponenciális függvény bevezetése

5.1.1. Előzetes ismeretek áttekintése

Az exponenciális függvény bevezetése előtt feltételezzük, hogy a diákok ismerik és képesek használni a hatványfüggvények, gyökfüggvények, valamint a tört- és negatív kitevőjű hatvány fogalmát és tulajdonságait (10. osztály).

5.1.2. Bevezető, motiváló feladatok

1. Feladat: Baktériumok szaporodása

A baktériumok szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgáljuk. A tenyészet naponta duplázódik meg. Kezdetben 1 baktérium van a tenyészetben. Mennyi baktérium lesz 1, 2, 3, 4, 5 nap múlva?
Töltsük ki a táblázatot!

Eltelt napok száma (n)	0	1	2	3	4
Baktériumok száma					

Írjuk fel a képletet, hogy milyen összefüggés alapján változik a baktériumok száma a tenyészetben!

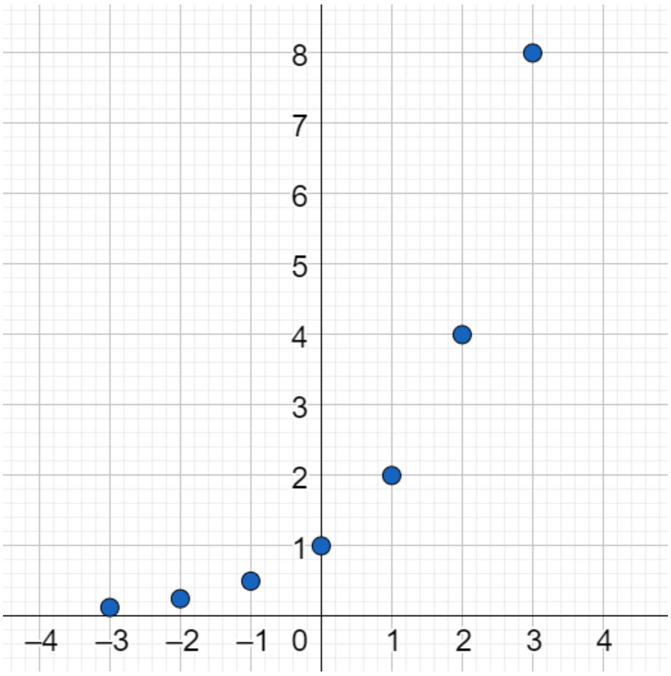
Észrevehetjük, hogy a baktériumok száma mindig kettő hatvány, mégpedig a kettőnek annyiadik hatványa, ahányadik napon vizsgáljuk a baktériumok számát. Vagyis a következőképpen írhatjuk fel a képletet: 2^n, ahol n az eltelt napok száma.

2. Feladat: Zöldmoszat hosszának változása

A második megfigyelésben egy zöldmoszat hosszának a változását vizsgáljuk. A moszat hossza kezdetben 1 méter, és 1 hónap alatt a duplájára nő. Állapítsuk meg, hogy mekkora lesz a zöldmoszat 1, 2, 3, 4 hónap múlva! Feltételezve, hogy ugyanakkora a növekedés, illetve ugyanazt a változási törvényt tartva, határozzuk meg, hogy mekkora volt az moszat a vizsgálat megkezdése előtt 1 hónappal! Azt tudjuk, hogy a moszat hosszát úgy kaptuk az eddigi hónapokra, hogy mindig az előző havi hosszát megszoroztuk egy adott számmal. Ebből következik, hogy a 0. hónapban hogy milyen hosszúságú a zöldmoszat, a -1. hónapban lévő hosszúságának az adott számmal való szorzásával kapjuk. A 0. hónapban, vagyis a megfigyelés kezdetén 1 méter volt a zöldmoszat, és havonta duplázódik. Vagyis most azt a számot keressük, amelyet, ha megszorzunk 2-vel, 1-et kapunk. Ez a szám nem más, mint az $\frac{1}{2}$, vagyis 0,5. Tehát a zöldmoszat hossza 0,5 méter volt a -1. hónapban. Hasonló módon határozzuk meg a hosszúságát 2, 3 és 4 hónappal a vizsgálat megkezdése előtt! Töltsük ki a táblázatot!

Eltelt hónapok száma (n)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Moszat hossza (m)									

Ábrázoljuk a kapott eredményeket derékszögű koordinátarendszerben!



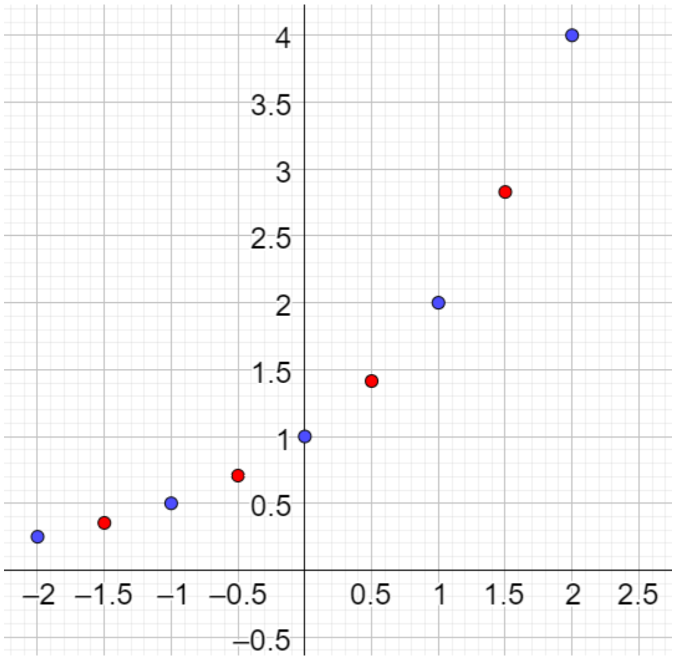
16. ábra: Zöldmoszat hosszának változása

Észrevehetjük, hogy most is, mint az első feladatnál, a zöldmoszat hossza mindig 2 hatvány, vagyis képlettel kifejezve 2^n, ahol az *n* az eltelt hónapok száma.

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen hosszú lesz a zöldmoszat az egyes hónapok közepén, azaz $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ ... hónap múlva? Talán legyen például $\frac{1}{2}$ esetén a már ismert 2^0 és 2^1 értékek számtani közepe? A tapasztalat mást mutat. A fentiek alapján feltételezhetjük, hogy most is hasonló törvény szerint írhatjuk fel a hossz változását, azaz $\frac{1}{2}$ hónap múlva $2^{1/2}$, és így tovább…

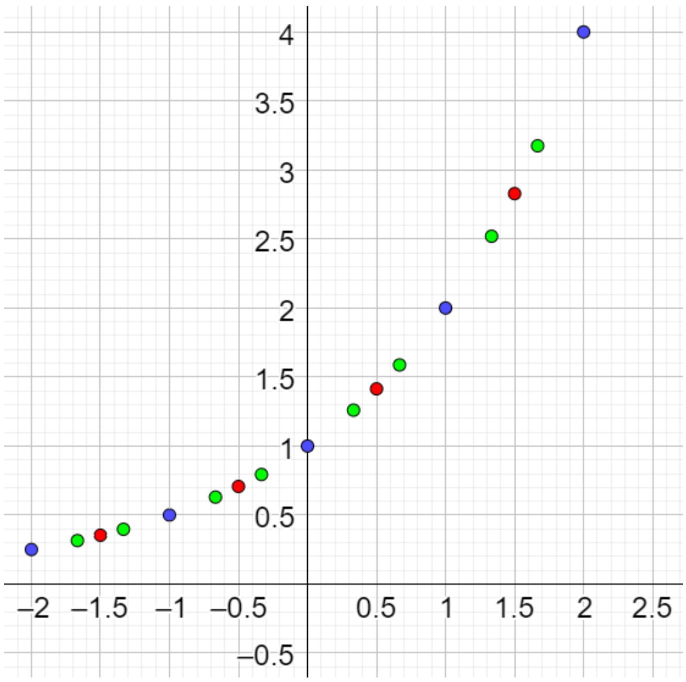
A pozitív és negatív egész hónapokhoz hasonlóan törtekre is kitölthetjük a táblázatot.

Eltelt hónapok száma (n)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Moszat hossza (m)					



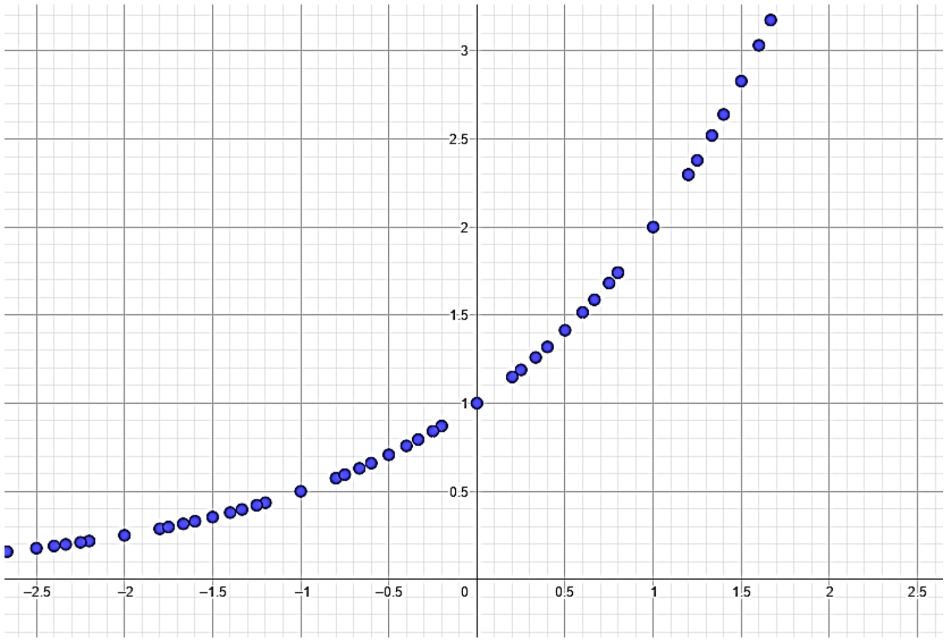
17. ábra: Zöldmoszat hosszának változása

A fentiekhez hasonlóan kérdezhetjük a moszat hosszát a hónapok 10, illetve 20. napján, azaz azaz $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ időpontokban (3 nevezőjű törtek), és így tovább bármilyen nevezőjű tört időpontokban is.



18. ábra: Zöldmoszat hosszának változása

Megkérdezhetjük a moszat hosszát bármely napon bármely órában is (akár tetszőleges p/q alakú racionális kitevők esetén). Sejthetjük, hogy a modell: $2^{p/q}$.



19. ábra: Zöldmoszat hosszának változása, kisebb időegységekre bontva

A kérdés most, milyen függvénnyel jellemezhetjük a zöldmoszatok hosszának változását? Adjunk matematikai modellt a zöldmoszatok időbeli változásra! Látjuk, hogy az egyre sűrűbben berajzolt pontok egy gyönyörű görbére illeszkednek. Az egész időpontokban talált összefüggések és általánosításaink alapján sejthetjük, hogy a moszat hossza a t (hónapban mérve) időpontban 2^t.

5.1.3. Fogalom definiálása

Definíció:

Legyen a > 0, akkor az $f: R \rightarrow R$, $f(x) = a^x$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

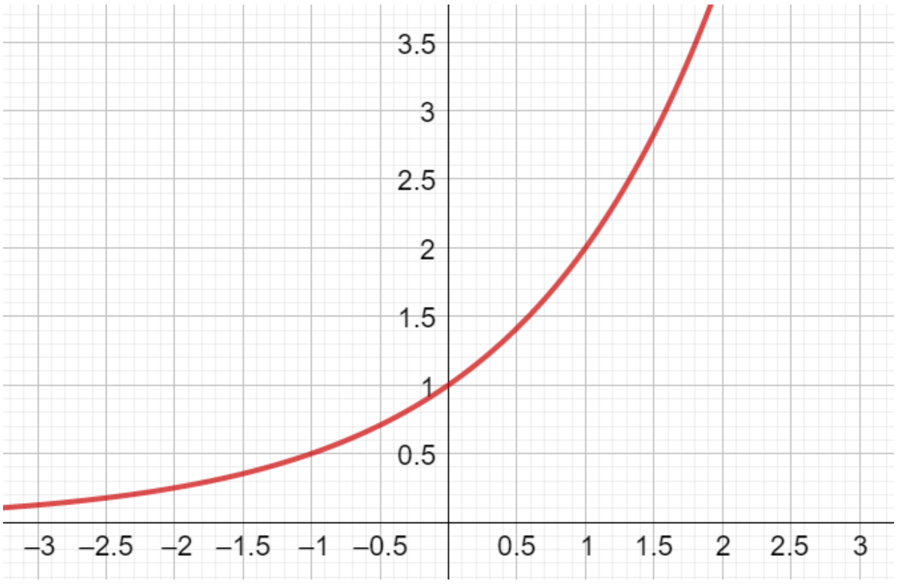
Az exponenciális függvénynél a hatvány alapja rögzített, a kitevő változik. A hatványfüggvények esetén épp fordítva, az alap változik és a kitevő rögzített.

Megjegyzések:

A függvény az a = 1 esetben nyilvánvalóan azonosan 1 értéket veszi fel. Ezzel az esettel nem szoktunk foglalkozni.

A $\frac{p}{q}$ törtkitevőkre $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ kiszámítható (10. osztály). Irracionális kitevőkre a^x, pl. $2^{\sqrt{2}}$ kiszámításához magasabb matematikai elmélet szükséges (határérték), így ez itt még nem tárgyalható. Sejthető azonban (pl. a moszat növekedését leíró pontokat látva), hogy a^x az irracionális számok esetén is meghatározható, ezért fogadjuk el, hogy az exponenciális függvény minden valós számra definiálva van.

Most már ábrázolhatjuk, a második feladatban szereplő zöldmoszat hosszának változását az idő függvényében.



20. ábra: Zöldmoszat hosszának változásának matematikai modellje: 2^x

5.1.4. Alapvető tulajdonságok

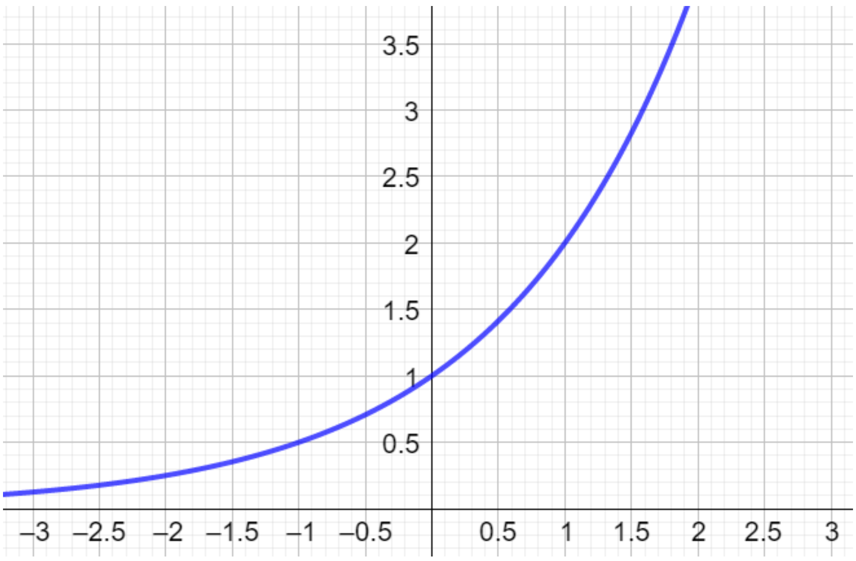
A hatványozás azonosságai és tulajdonságai alapján az exponenciális függvény néhány fontos tulajdonságát azonnal észrevehetjük. Az azonos alapú exponenciális függvények szorzása, osztása, hatványozása esetén a hatványozás azonosságait alkalmazzuk (9. osztály). Ezt a diákok számára hangsúlyozni kell!

Grafikon, Növekedés, csökkenés (monotonitás)

Az exponenciális függvény növekvő, ha az alapja nagyobb, mint 1, vagyis $a > 1$, mivel ha $x > y$, akkor $x - y > 0$, és ezért

$$a^x = a^y \cdot a^{x-y} \text{, mivel } a^{x-y} > 1 \; (a > 1, x - y > 0 \,),$$

Például, $2^2 < 2^3$, mivel $2^3 = 2 \cdot 2^2$.

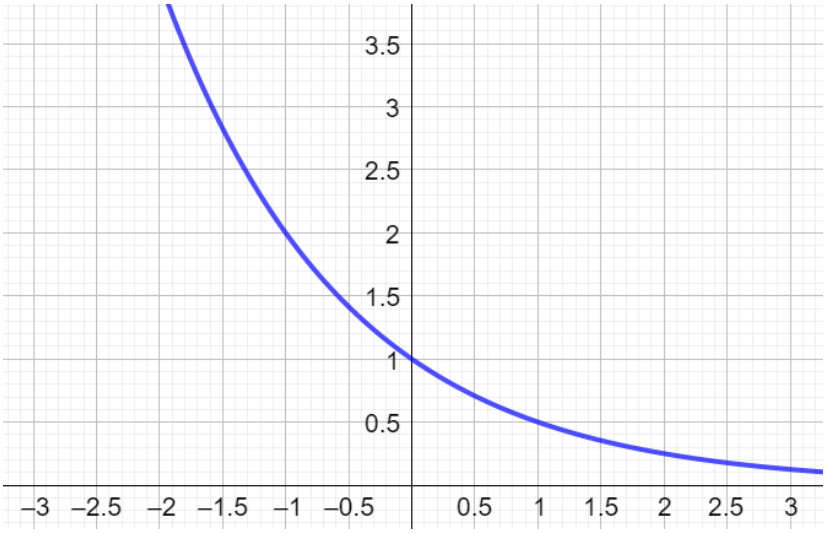


21. ábra: Növekvő exponenciális függvény: $2^x, a > 1$

Ha viszont $0 < a < 1$, akkor a függvény csökkenő, mivel ekkor

$a^x = a^y \cdot a^{x-y}$ és $a^{x-y} < 1$

Például, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$, mivel $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$.



22. ábra: Csökkenő exponenciális függvény: $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $0 < a < 1$

Mint láttuk a moszat esetén, a szaporodást, növekedést növekvő exponenciális függvények modellezik. Csökkenő exponenciális függvényekkel pedig kihalást, gyógyszerek kiürülését vagy radioaktív bomlást lehet leírni.

Reciprok alapok kapcsolata: $a > 1$, $0 < \frac{1}{a} < 1$

A fenti tulajdonságok speciális eseteként nézzük meg, hogy hogyan viselkednek az exponenciális függvények, ha alapjuk egymás reciproka. Legyen például $a = 2$.

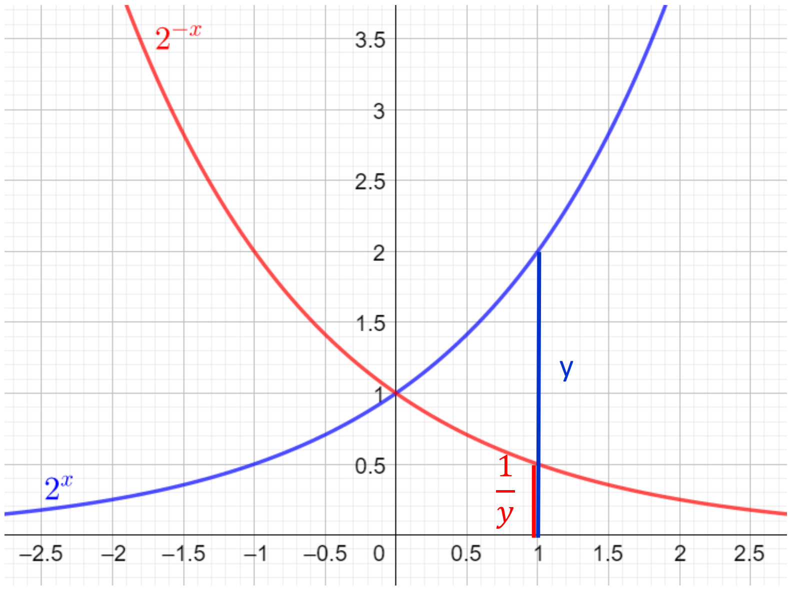
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Általában,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

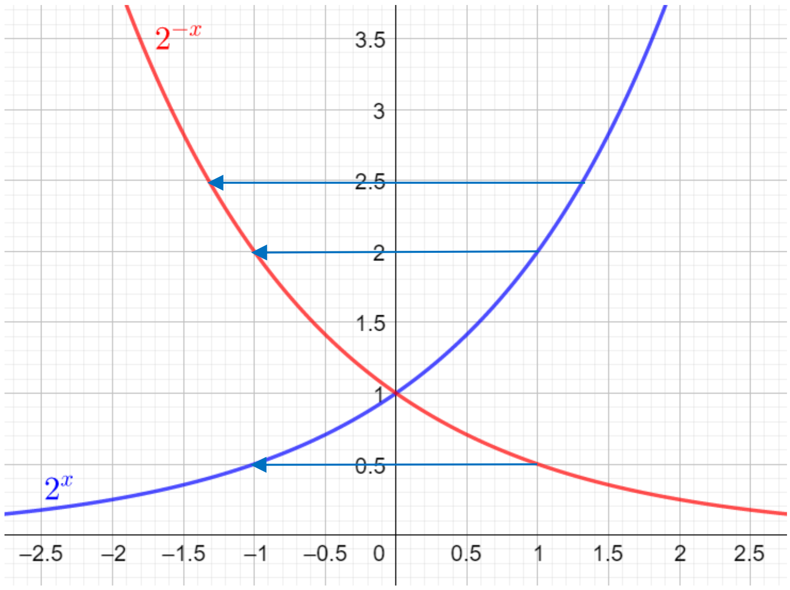
Ez a két felírás két különböző érdekes összefüggést jelent:

$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ azt mondja, hogy az $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ függvényt az a^x reciprokaként kapjuk.



23. ábra: Reciprok függvények

Az $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ összefüggés jelentése pedig (elemi transzformációk, 9. osztály) az, hogy a két függvény grafikonja egymás tükörképe lesz az *y*-tengelyre nézve.



24. ábra: Tükörképek

Különböző alapok összevetése

Most nézzük meg egy példán, milyen kapcsolatban vannak a különböző alapú exponenciális függvények, pl. 2^x és 3^x . Legyen $x > 0$. Ekkor

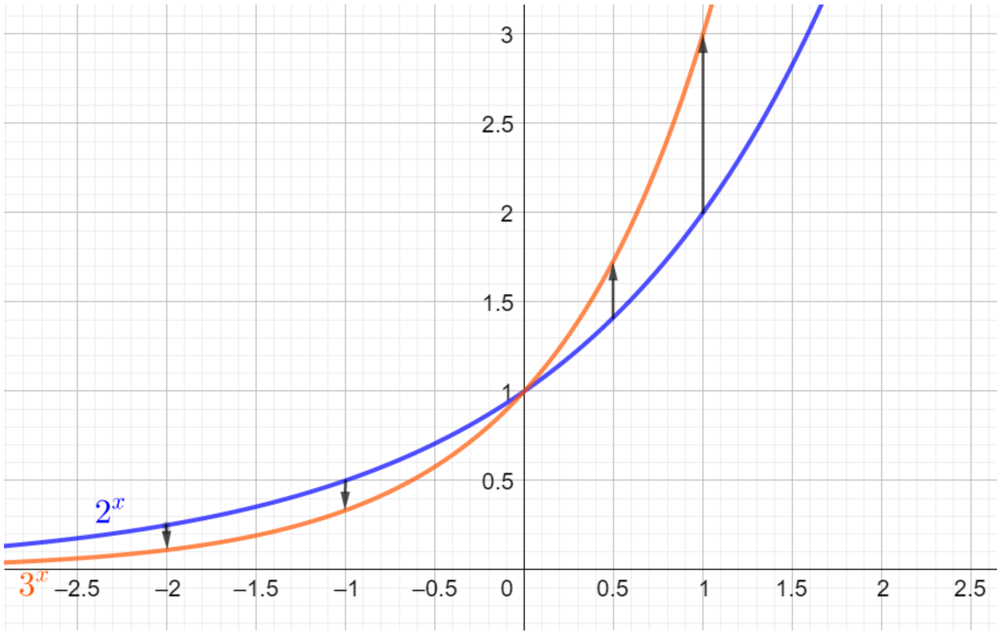
$3^x = 2^x \frac{3^x}{2^x} = 2^x \left(\frac{3}{2}\right)^x > 2^x$, mivel $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$.

Általánosan, legyen $a > b$: $a^x = b^x \frac{a^x}{b^x} = b^x \left(\frac{a}{b}\right)^x > b^x$, mivel $\left(\frac{a}{b}\right)^x > 1$.

Ha $x < 0$, akkor pedig

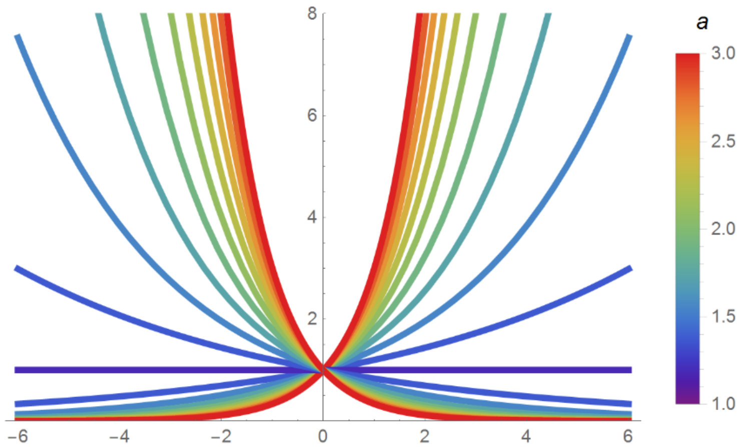
$3^x = 2^x \frac{3^x}{2^x} = 2^x \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^x \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} < 2^x$, mivel ekkor $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} < 1$.

Általánosan, ha $a > b$: $a^x = b^x \frac{a^x}{b^x} = b^x \left(\frac{a}{b}\right)^x = b^x \left(\frac{b}{a}\right)^{-x} < b^x$, mivel $\left(\frac{b}{a}\right)^{-x} < 1$.



25. ábra: Különböző alapok összevetése: 2^x és 3^x

Ez alapján mondhatjuk, hogy $a > 1$ esetén a nagyobb alap gyorsabb növekedést eredményez. A „reciprok" alapok kapcsolata alapján pedig azt mondhatjuk, hogy a kisebb alap gyorsabb csökkenést jelent. Mindezt a dolgozat címoldalának ábrája igen szépen mutatja.



26. ábra: Különböző alapok összevetése: $a^x, \left(\frac{1}{a}\right)^x$; $1{,}3 \leq a \leq 3$

5.2. Feladatok

1. Válassza ki az exponenciális függvényeket!

a) $f(x) = 4^{-x}$

b) $f(x) = 5^{2x}$

c) $f(x) = 5 \cdot 9^{4x}$

d) $f(x) = x^3 - 3$

e) $f(x) = 3 \cdot 2^{-2x}$

f) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 5$

(Ezek a feladatok egyszerű matematikai készségek automatizálását teszik lehetővé, amelyekkel a diákok begyakorolhatják a logaritmus definíciójának alkalmazását.)

2. Melyik kapcsolatokat ír le exponenciális függvény? Adja meg a függvénykapcsolatokat!

a) Négyzet oldala és területe.

b) Egy régebbi kiadású autó ára évente 5%-kal csökken.

c) Év elején beteszünk a bankba 50000 forintot, évi 7,5%-os kamatra. Idő és a kamatokkal megnövelt összeg kapcsolata.

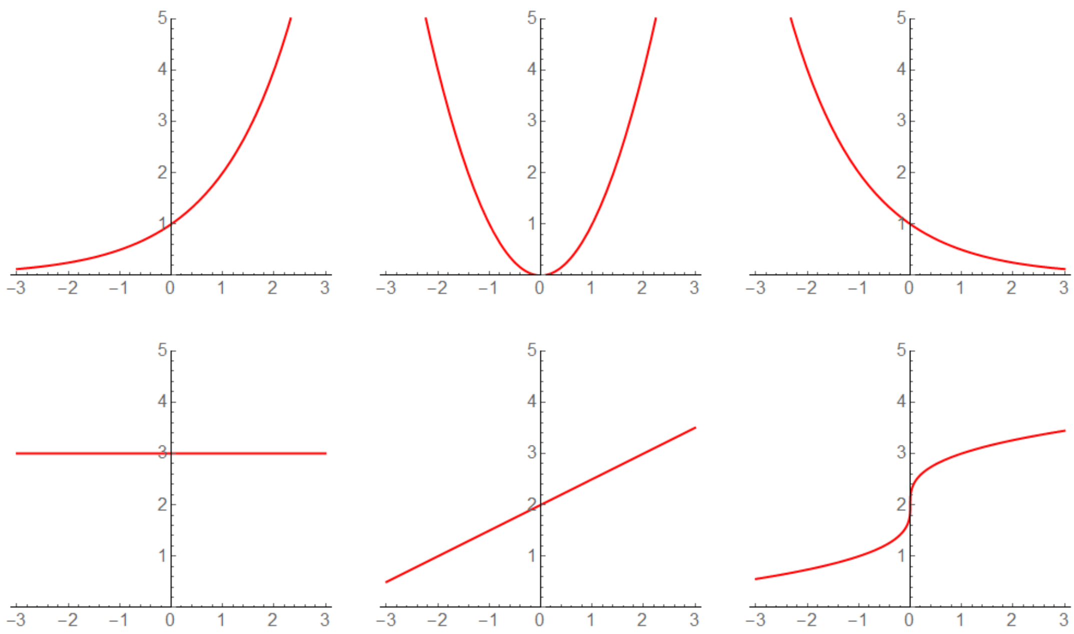
d) Baktériumok szaporodása, ha naponta osztódnak.

e) A használat során egy kerékpár értéke egy év alatt 20%-kal csökken. Idő és a kerékpár ára közötti kapcsolat.

f) Egy tornán n csapat közötti mérkőzések száma, ha mindenki mindenkivel játszik.

g) A szabályos háromszög oldala és a magassága.

3. Az alábbi grafikonok közül, melyek lehetnek exponenciális függvény grafikonjai?



27. ábra: 3. feladat ábrái

(Ez a feladat ellenőrzi, hogy a diákok fel tudják-e ismerni az exponenciális növekedést illetve csökkenést.)

4. Egy kísérlet során észrevették, hogy egy baktérium tenyészet területe naponta 55%-kal növekszik. Számítsa ki, hogy mekkora lesz a tenyészet területe 1, 2, 3, 4, n nap múlva, ha a 0. napon 1500 mm^2volt.

Írja fel, hogy milyen függvény alapján változik a baktérium tenyészet területe!

5. Egy zöld alga hossza 4 óránként a duplájára nő. Kezdeti hossza 10 mm volt. Számítsa ki, hogy milyen hosszúra növekszik 12 óra, 1 nap és 1 hét alatt! Határozza meg az óránkénti százalékos növekedést!
6. Egy kerti tavon békalencse szaporodik úgy, hogy a megfigyelés kezdetekor 0,25 m^2 az általa befedett vízfelület nagysága, majd ez naponta megduplázódik.
   a) Ábrázoljuk, hogy hogyan függ a befedett terület nagysága a napokban mért időtől!
   b) Mekkora a befedett terület nagysága a megfigyelés kezdetéhez képest 2 nap elteltével?
   c) Hány nap alatt fedi be a békalencse egészen a tó felszínét, ha a vízfelület nagysága 128 m^2?

(A 4., 5. és 6. feladatok a exponenciális változás és biológia tantárgy kapcsolatát szemléltetik, amelyek különösen hasznosak lehetnek az ilyen jellegű folyamatok megértéséhez, valamit az exponenciális függvény alkalmazhatóságához.)

7. A régészeti leletek kormeghatározásának egyik lehetséges módszere az úgynevezett radiokarbon módszer. Ennek lényege, hogy a radioaktív ^{14}C szénizotóp bomlásánál az izotópok számának időfüggését az $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$összefüggés adja meg, ahol N_0 az izotópok száma kezdetben, T pedig a felezési idő: ennyi idő alatt csökken az adott mintában a ^{14}C szénizotópok száma a felére. Tudjuk, hogy a ^{14}C szénizotóp esetén T =5570 év, így a képlet segítségével t meghatározható, ha ismert $\frac{N(t)}{N_0}$ értéke.
   a) Hány éves lehet az a lelet, amelyben a mérések szerint a radioaktív ^{14}C mennyisége a negyedére csökkent? (Évszázados pontossággal adjuk meg!)
   b) Hány éves lehet az a lelet, amelyben a mérések szerint a radioaktív ^{14}C mennyisége a harmadára csökkent? (Évszázados pontossággal adjuk meg!)
8. A radioaktív izotópok bomlásának időfüggését az $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$összefüggés adja meg, ahol, az izotópok száma kezdetben N(t) az izotópok száma t idő múlva, T pedig a felezési idő: ennyi idő alatt csökken az adott mintában az izotópok száma a felére. Adott egy urántömb, amely 30% ^{235}U izotópot és 70%^{238}U izotópot

tartalmaz. Tudjuk, hogy ideje $7{,}1 \cdot 10^8$ év, az ^{238}U izotóp felezési ideje $4{,}51 \cdot 10^9$ év. Hány év múlva lesz az ^{235}U mennyisége 1%-a az ^{238}U mennyiségének?

(A 7. és 8. feladat szintén gyakorlati jellegű, de ezek inkább régészetben, kormeghatározásban használatos számításokhoz alkalmazhatóak.)

5.2.1. Az exponenciális függvény kapcsolata a mértani sorozattal (fakultáció)

Az exponenciális függvényt a moszat növekedésénél természetes módon egész kitevők esetén, azaz mértani sorozattal vezettük be (2^n). Az első és második feladatban az egymás utáni napok, illetve hónapok értéke úgy számolódik, hogy mindig az előtte való értéket megszorozzuk egy adott számmal. Vagyis az (n+1)-edik napon az n-ik nap valahányszorosa lesz a baktériumok száma (1. feladat). Ugyanakkor, a tanterv szerint a mértani sorozat csak a 12. osztályban kerül elő. Meggondolandó lenne a mértani sorozatok egyszerű eseteinek tárgyalása az exponenciális függvény bevezetése előtt.

Az ilyen sorozatok nem csak a biológiában, de mindenütt jelen vannak (gazdaság, fizika, mesék világa …). Egy érdekes, mindenki által jól ismert történet is mértani sorozatról szól. Egy monda szerint a sakkot egy brahmin (indiai kasztrendszer legfelsőbb kasztjának tagja) találta ki, hogy szórakoztassa a rádzsáját. Fizetségül első hallásra jelentéktelen összeget kért, mindössze annyi búzaszemet, amelyet a következő szabály szerint állapítottak meg: a sakktábla első mezőjére egy búzaszemet tegyenek, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet, a negyedikre nyolcat, és így tovább, minden mezőre kétszer annyit, mint az előzőre.

A búzaszemek száma olyan számsorozatot alkotnak, ahol minden elem száma az előző kétszerese. Milyen következtetést vonhatunk le ebből? Mennyi lesz a búzaszemek száma az n-ik napon? A válasz ugyanaz, mint a moszat esetén.

Definíció:

Azokat a sorozatokat, amelyekben a második tagtól kezdve minden tag az előző tag ugyanannyiszorosa mértani sorozatnak nevezzük, azaz $a_{n+1} = q\, a_n, n \epsilon Z^+$*, ahol a q állandót nevezzük a sorozat kvóciensének.*

Másként fogalmazva, a mértani sorozatban a szomszédos elemek hányadosa a q állandó:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, a_n \neq 0, n \epsilon Z^+$$

Megjegyezzük, hogy ha $a_0 \neq 0$, akkor a sorozat egyik tagja se lehet nulla.

3. Példa:

Az 1, 2, 4, 8, 16,… olyan mértani sorozat tagjai, amelynek az első eleme 1, a kvóciense pedig 2. Az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ pedig olyan mértani sorozat elemei, ahol az első elem szintén 1, viszont a kvóciens $\frac{1}{2}$.

Határozzunk meg a példában szereplő első mértani sorozat 10. elemét!

$a_1 = 1, q = 2, a_{10} = ?$

A képzési szabály szerint:

$a_2 = a_1 \cdot q = 1 \cdot 2 = 2$

$a_3 = a_2 \cdot q = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2 = 4$

$a_4 = a_3 \cdot q = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^3 = 8$

$a_5 = a_4 \cdot q = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^4 = 16 \ldots$

Milyen szabályt fedezhetünk fel a tagok képzése során? Bármelyik tagot előállíthatjuk a következő módon: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Ebből a képletből már ki tudjuk számolni a mértani sorozat 10. tagját:

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$

Ugyanakkor, ha ugyanezt a sorozatot vizsgáljuk, mit vehetünk még észre? Milyen számok ezek? Ezek a számok a kettő hatványai. Vagyis felírhatjuk őket exponenciális függvényként is: $f(x) = 2^x$.

Ha nem 1 lenne a sorozat első eleme, akkor is fel tudnánk írni exponenciális függvénnyel? Nézzünk egy példát!

Legyen $a_1 = 5, q = 2$. Ekkor a sorozat elemei: 5, 10, 20, 40, 80,… Vagyis felírhatjuk, hogy:

$a_2 = a_1 \cdot q = 5 \cdot 2 = 10$

$a_3 = a_2 \cdot q = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^2 = 20$

$a_4 = a_3 \cdot q = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^3 = 40$

$a_5 = a_4 \cdot q = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2^4 = 80 \ldots$

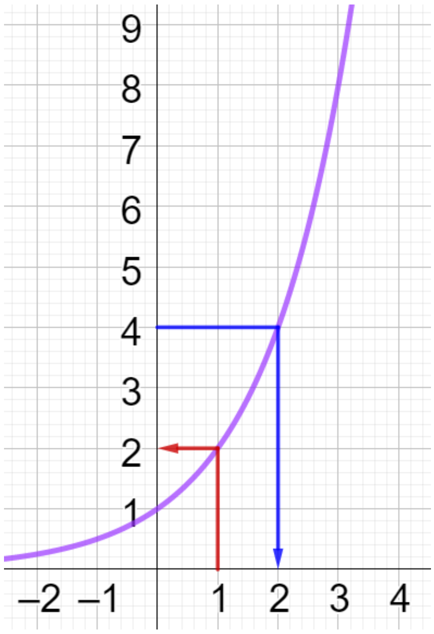
Melyik exponenciális függvény írja le ennek a mértani sorozatnak a tagjait? Ez nem más, mint az $f(x) = 5 \cdot 2^x$ függvény. Vagyis ebből adódóan, általánosan, ha egy mértani sorozat első tagja a_1, akkor fel lehet írni elemeit a következő exponenciális függvénnyel: $f(x) = a_1 \cdot q^x$.

5.3. A logaritmus fogalmának bevezetése

5.3.1. Bevezető, motiváló feladat

4. Feladat: Zöldmoszat hossza

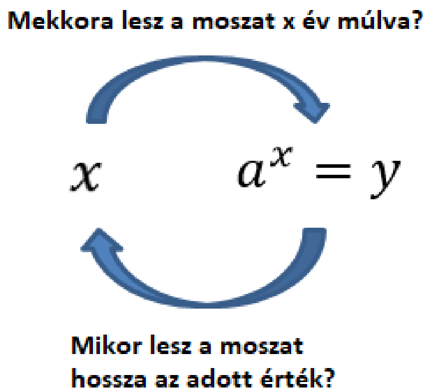
Vegyük ismét a zöldmoszat példáját, melynek kezdeti hosszúsága 1 m, és 1 hónap alatt nő a duplájára. A lenti grafikon a zöldmoszat hosszának növekedését ábrázolja 1 m-ről kiindulva.



28. ábra: Zöldmoszat hosszának változása az idő függvényében

Az eredeti kérdésünk: Mekkora lesz a moszat 1, 2, 3, … hónap múlva? Ekkor a piros nyíl iránya szerint kell leolvasnunk az értéket a grafikonról.

Ha viszont az a kérdés, hogy hány hónap után lesz az eredetileg 1 m-es zöldmoszat 4 m, 8 m, akkor hogy tudjuk ezt leolvasni az ábráról? Ebben az esetben a kék nyíl irányát kell követnünk. Adjunk becslést (közelítő értéket) a grafikon alapján, hogy hány hónap alatt lesz 6 méteres a zöldmoszat!



29. ábra: $x \text{ és } a^x$ közötti kapcsolat

A zöldmoszat hossza mindig 2 hatvány. Tehát ha azt szeretnénk meghatározni, hogy mikor lesz 6 méter a hossza, akkor azt a következő módon tudjuk felírni:

$$2^x = 6$$

Szavakkal: keressük az a kitevőt, amelyre a kettőt emelve 6-ot kapunk.

5. Feladat: gombák szaporodása

A gombák száma egy nap alatt a duplájára nő. Kezdetben (0. nap) 125 gomba van. Mikor lesz 1000 a gombák száma?

A nulladik napon a gombák száma 125, az első nap $2 \cdot 125$, a második nap $2^2 \cdot 125$, vagyis az x. nap $2^x \cdot 125$. Ahhoz, hogy meghatározzuk, hogy mikor lesz a gombák száma 1000, azt a kitevőt kell megkeresni, amelyre igaz lesz a $2^x \cdot 125 = 1000$ egyenlőség.

5.3.2. Fogalom definiálása

Definíció:

Legyen $a \neq 1$ pozitív valós szám. Tetszőleges b pozitív valós szám esetén létezik pontosan egy olyan c valós szám, hogy $b = a^c$. Ekkor a c hatványkitevőt a b szám a alapú logaritmusának nevezzük.

Jelölés: $log_a b = x$.

Tulajdonságok:

$\boldsymbol{a^{log_a b} = b}$ *és ha* $\boldsymbol{log_a x = b}$*, akkor* $\boldsymbol{x = a^b}$.

Ha a logaritmus alapja 10, akkor rövidebb jelölést használunk: $\log_{10} b$ helyett lgb–t írunk.

Vagyis a moszatos feladattal szemléltetve, például a $log_2 25$ azt az időtartamot jelenti, amely alatt a zöldmoszat 25 méteresre növekszik. Vagyis a $log_2 25$ egyenlő azzal a kitevővel, amelyre a 2-t kell emelni ahhoz, hogy 25-öt kapjunk.

Általánosan megfogalmazhatjuk, hogy ha a zöldmoszat a vizsgálat kezdetekor 1 méter, és ha 1 hónap alatt *a*-szorosára növekszik, akkor a $log_a b$ kifejezés jelenti azt az időmennyiséget, amely ahhoz szükséges, hogy a moszat *b* méter hosszú legyen.

Gyakorlásként adjuk meg, hogy mit jelent a példában a $log_2 60$, $log_2 80$, $log_2 100$!

Számítsuk ki a $log_2 2$, $log_2 4$, $log_2 8$, $log_2 16$ értékét!

5.4. Feladatok

Az első hat feladat a fogalom megértésére, a definíció alkalmazásának gyakorlására szolgál. Ahogy haladunk végig a fokozatosan nehezedő példákon, ahol már megjelennek egyenletek is, elérünk az alkalmazásig is, amelyet a 7. és 8. feladat tartalmaz. A 7. feladat biológiai motivációjú alkalmazási feladat, nagyon hasonló a bevezető példákhoz. A 8. feladat viszont inkább a gazdasági tudományok területéhez köthető, ilyen típusból több is szerepel az érettségi feladatsorok között is.

1. Hogyan kell kiolvasni a következő kifejezéseket? Írja a kifejezések alá, majd számítsa ki az értéküket!

   a) $log_5 25$

   b) $log_3 27$

c)$log_4 16$

2. Igazak-e a következő egyenlőségek? Amelyikben hibát talál, javítsa ki!

a) $log_5 125$=3

b) $log_6 60$=6

c) $lg100$=10

d) $log_8 512$=2

e) $log_3 81$=4

3. Írja le szimbolikusan!

a) 10-es alapú logaritmus 1000

b) 6-os alapú logaritmus 15

c) 2-es alapú logaritmus 124

d) 7-es alapú logaritmus $\frac{1}{49}$

e) 3-as alapú logaritmus 30

4. Írja át hatvány alakba a következő kifejezéseket!

a) $log_4 16 = 2$

b) $log_2 8 = 3$

c) $log_3 27 = 3$

d) $log_5 625 = 4$

e) $log_{16} 256 = 2$

f) $lg100 = 2$

5. Írja át logaritmusra!

a) $5^2 = 25$

b) $7^0 = 1$

c) $2^5 = 32$

d) $9^3 = 729$

e) $3^6 = 729$

f) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

6. Oldja meg az egyenleteket!

a) $log_x 32 = 5$

b) $log_x 121 = 2$

c) $lgx = \frac{3}{2}$

d) $log_5 x = 3$

e) $log_x 256 = 4$

f) $log_6 x = -1$

g) $log_2 x = -0,5$

h)$lgx = -5$

(Az első 3 feladathoz hasonlóan az 4-6 feladatok is a definíció helyes alkalmazásán alapszanak.)

7. Egy kezdetben 1 cm-es zöldmoszat hossza hetente 5-szörösére nő. Mennyi idő szükséges, hogy elérje az 5 cm, 10 cm, 20 cm, 125 cm és 1 m-es hosszúságot? Fejezze ki az időmennyiséget logaritmus segítségével!

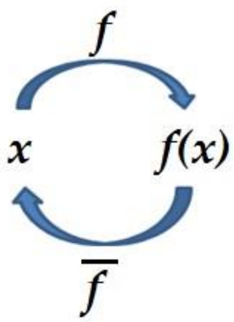
8. 100 ezer forintot évi 15%-os kamatos kamatra beteszünk a bankba.

a) Hány forintunk lesz 15 év múlva?

b) Hány év múlva lesz 1 millió forintunk?

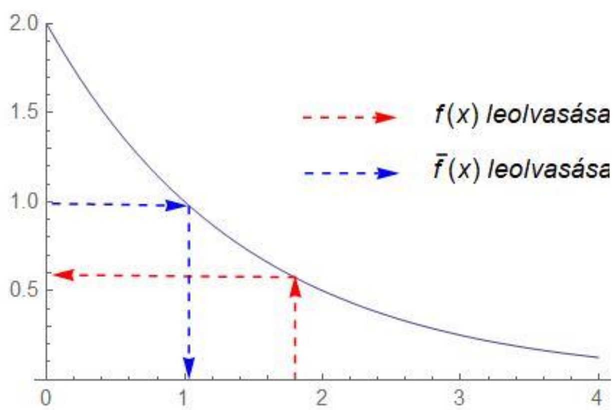
5.5. Logaritmus: az exponenciális függvény inverze

Az inverz függvény fogalmával 11. osztályban, kiegészítő tananyagként, ismerkedhetnek meg a diákok. A sokszínű matematika tankönyv főként trigonometrikus függvényekre tárgyalja. Fő kérdésként azt veti fel, hogy adott szögfüggvényértékhez hogyan kell visszakeresni azt a számot, vagyis a megfelelő szöget, amelyhez a függvény az adott értéket rendeli.



30. ábra: $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ közötti kapcsolat

A logaritmus függvény az exponenciális függvény inverze. Ha van egy adott felezési idejű $f(x)$ exponenciális függvény, amely gyógyszerkiürülés ábrázol, akkor arról le lehet olvasni, hogy egy adott időpontban mennyi lesz a vérben lévő gyógyszermennyiség. Ez az $f(x)$ függvény leolvasása. Azonban, ha az a kérdés, hogy melyik időpillanatban lesz a vérben adott tömegű gyógyszer, akkor visszafelé kell leolvasni a megoldást a grafikonról. Ez az inverz függvény (melynek a jele $\bar{f}(x)$) leolvasása.



31. ábra: $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ leolvasási iránya

Megjegyzés:

Az inverz függvény jele sokszor az f^{-1}, azonban most az $\bar{f}$ -t használjuk, hogy ne legyen összetéveszthető a -1. hatvánnyal.

5.6. A logaritmus azonosságai

A logaritmussal való számolást sokban megkönnyítik a logaritmus azonosságai. Most ezeket vezetem be.

Tudjuk, hogy $\log_5 25 = 2$ és $\log_5 125 = 3$.

Az is igaz, hogy $\log_5(25 * 125) = \log_5 3125 = 5$, illetve

$5 = 2 + 3 = \log_5 25 + \log_5 125$.

Általánosságban megfogalmazhatjuk, hogy $\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$.

Hasonló módon felírhatunk az azonos alapú logaritmusok különbségére is egy azonosságot: $\boldsymbol{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$.

Nézzük meg a következő példát:

$\log_2 16^2 = \log_2 256 = 8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot \log_2 16$

Általánosan ez a következőképp írható fel:

$$\boldsymbol{\log_a x^k = k \cdot \log_a x}$$

A zsebszámológépek és a táblázatok általában 10-es alapú vagy természetes alapú (e) logaritmust használnak, azonban a feladatok megoldásában sokszor van szükség másik alap alkalmazására. Hogyan is lehetne kiszámolni más alapú logaritmusértékeket? Egy újabb logaritmus azonossággal:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

6. Példa

Írjuk fel a 2-t a 3 hatványaként!

Megoldás: $2 = 3^x \Leftrightarrow \log_3 2 = \log_3 3^x \xLeftrightarrow{szigorúan\ monoton\ növő} \log_3 2 = x$

$$2 = 3^{\log_3 2}$$

7. Példa

Egy trópusi lián hossza minden héten a másfélszeresére nő. Milyen hosszú lesz 6 hét múlva, ha most 160 cm.

Vegyük észre, hogy a lián hossza egy mértani sorozat szerint változik. A sorozat első tagja $a_1 = 160\ cm, q = 1{,}5$. Hányadik tagját keressük? A kezdeti hossz az első tag, 1 hét múlva a második tag, 2 hét múlva a harmadik tag,… tehát a 6 hét múlva már a sorozat hetedik tagját kapjuk. Behelyettesítve a képletbe:

$$a_7 = 160 \cdot 1{,}5^6 = 1822{,}5 \text{ cm} = 18{,}225 \text{ m}$$

Vagyis 6 hét múlva 18,255 m magas lesz a lián. Most számoljuk ki, hogy hány hét múlva éri el a 40 m-es magasságot? Ekkor azt keressük, hogy a mértani sorozat hányadik eleme lesz 40 m vagyis 4000 cm. A képletbe behelyettesítve exponenciális egyenletet kapunk:

$4000 = 160 \cdot 1{,}5^{n-1}$ /: 160

$$25 = 1{,}5^{n-1}$$

Azt, hogy hányadik hatványa a másfélnek a 25, úgy tudjuk meghatározni, hogy ha az n-t lehozzuk a kitevőből. Ezt úgy tudjuk elérni, hogy ha vesszük az egyenlet mindkét oldalának tízes alapú logaritmusát, majd a logaritmikus azonosságokat felhasználva rendezzük az egyenletet:

$lg25 = lg1{,}5^{n-1}$

$lg25 = (n-1)lg1{,}5$

$n - 1 = \dfrac{lg25}{lg1{,}5}$

Így $n = 8{,}9$. Viszont n értéke csak pozitív egész szám lehet, így a kapott értéket 9-re kell kerekíteni. Ismét figyelembe kell venni, hogy a kezdeti hosszúság a sorozat első tagja, ezért a válasz a kérdésre az, hogy 8 hét alatt éri el a lián a 40 méteres hosszúságot.

5.7. Tulajdonságok: duplázódási és felezési idő

Az a^x függvény lerajzolása nem egyszerű feladat. A duplázódási illetve a felezési idő a hétköznapi életben használatos és szemléletes tulajdonságok. Lényegesen megkönnyíti mind a fogalom megértését és a függvények ábrázolását is.

8. Példa: osztódás

Az eukarióta egysejtű algák osztódással szaporodnak. Ehhez a folyamathoz egyetlen sejt is elegendő. Ez az egy sejt kettéosztódik, majd a keletkezett két új sejt szintén, és így tovább. Az algák száma minden osztódást követően az előző duplája lesz.

Kezdetben legyen az algák száma 1500. Ekkor a szaporodásuk folyamatát a $2^x \cdot 1500$ képlettel írhatjuk fel, ahol az *x* az eltelt időt jelöli. A kérdés: mennyi idő múlva lesz 3000 alga a tenyészetben?

$$f(T) = 2^T \cdot 1500 = 3000$$

$$2^T = 2$$

$$T = 1$$

Megkaptuk, hogy ebben az esetben a 1 nap alatt osztódnak ketté az algák.

Most vegyünk általánosan egy példát. Egy folyamatot a függvény az $f(x) = a^x, (a > 1)$ függvény ír le. Határozzuk meg a duplázódási idejét!

$$f(0) = a^0 = 1$$

$$f(T) = 2 \cdot f(0) = 2$$

$$a^T = 2$$

$$T = \log_a 2$$

Definíció

A duplázódási idő az az időtartam, amely alatt egy folytonos, monoton növekvő vizsgált érték duplázódik.

A definícióból levezetve a képlet:

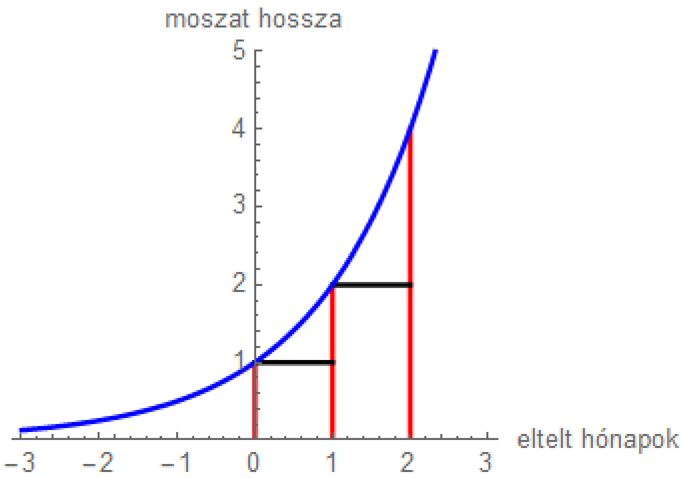
$$a^{t+T} = 2a^t$$

$$a^T = 2$$

$$T = 1/\log_2 a$$

A hatványozás azonosságaiból levezethető, hogy az $f(x) = a^x$ függvény az a^{x+T}értéknél fog duplázódni.

Ilyen folyamatra további példának vehetjük a sejttenyészetek szaporodását, populációnövekedést, és a már korábban említett zöldmoszat hosszának változását is.



32. ábra: Duplázódási idő

A csökkenő exponenciális függvények analóg tulajdonsága a felezési idő.

Definíció

A felezési idő az az időtartam, amely alatt egy folytonos, monoton csökkenő vizsgált érték feleződik.

A definícióból levezetve a képlet (a < 1!):

$$a^{t+T} = \frac{1}{2}a^t$$

$$a^T = \frac{1}{2}$$

$$T = -\frac{1}{\log_2 a} = \frac{1}{\log_2 \frac{1}{a}}$$

Vegyük észre, hogy $a > 1$ esetén az exponenciális függvény az x növekedésével duplázódik, x csökkenése esetén feleződik, míg $0 < a < 1$ esetén éppen fordítva. ezért a duplázódási és felezési idő képlete lényegében azonos.

Példának vehetjük a gyógyszerkiürülést és a radioaktív atommagok bomlását is. Vegyünk egy folyamatot, amelyet az $f(x) = a^x$, $(\ 0 < a < 1)$ függvény ír le. Határozzuk meg a felezési idejét!

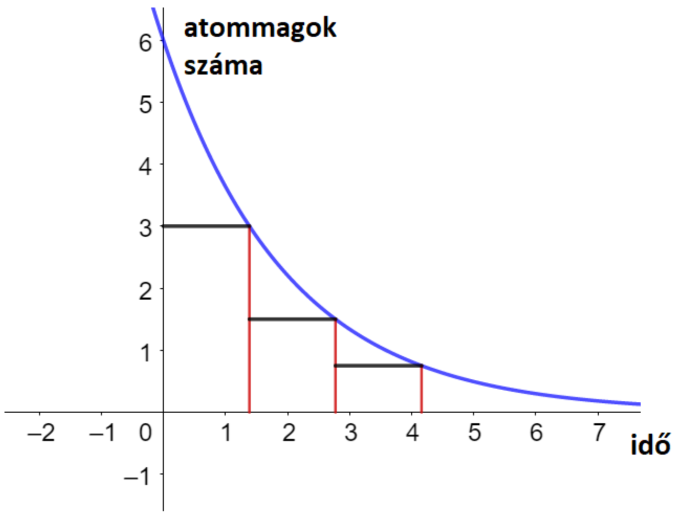
$$f(0) = a^0 = 1$$

$$f(T) = \frac{1}{2} \cdot f(0) = \frac{1}{2}$$

$$a^T = \frac{1}{2}$$

$$T = \log_a \frac{1}{2}$$

Gyógyszerkiürülésnél során egy időegység alatt a gyógyszer adott hányada szívódik fel, illetve a felszívódott gyógyszer adott hányada ürül ki. Más szavakkal egységnyi idő alatt a gyógyszer azonos hányada ürül a vérből. Például az Algopyrinnél a gyógyszerkoncentráció 4 óránként a felére csökken. A kiürülésnél biológiai (anyagcsere, kiválasztás), fizikai (radioaktív bomlás) és kémiai (vegyületek lebomlása) folyamatok együttesen vesznek részt. A májon keresztül történő kiürülés leírható egy exponenciális függvénnyel: $C_t = C_0 \cdot e^{-kt}$, ahol a C_t a koncentráció t idő elteltével, C_0 a kezdeti koncentráció és *k* a kiürülési konstans.



33. ábra: Felezési idő, radioaktív bomlás (fiktív példa)

9. Példa: Radioaktív atommagok bomlása

Másik tipikus példa a radioaktív atommagok bomlása. A még el nem bomlott radioaktív atommagok száma exponenciálisan csökken az idő múlásával.

Számítsuk ki a rádium felezési idejét (T), ha 240 nap alatt a rádium 10%-a bomlik el!

$$0{,}9 \cdot N_0 = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{T}}$$

$$\log_2 0{,}9 = \frac{-240}{T}$$

$$T \approx 1578{,}9 \text{ év.}$$

10. Feladat: Gyógyszermennyiség változása a vérben

A vérben Mennyi az Algopyrin gyógyszermennyiségének 35%-a 3 óra alatt ürült ki a szervezetből. a felezési ideje, hogy ha $f(t) = C_0 e^{-kt}$ függvény szerint változik, ahol a k az elinimációs rátát jelenti (legyen $k = 0{,}865$).

11. Feladat: Radioaktív bomlás I

A 14-es tömegszámú szénizotóp felezési ideje 5568 év. Mennyi idős az a régészeti lelet, amelyben a C^{14}atomok 35,32%-a bomlott el? Az atomok hány százaléka bomlik el 10000 év alatt? $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ (N_0 az atomok számának kezdeti, N pedig a pillanatnyi értéke, T a felezési idő)

12. Feladat: Radioaktív bomlás II

Egy radioaktív anyag 30 %-a 2,7 nap alatt bomlik el. Határozd meg a felezési idejét, ha a bomlási törvény a következő: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$($\lambda$: bomlási állandó).

(Ezeknek a példáknak, feladatoknak az a célja, hogy a természettudományok iránt érdeklődő diákok megismerjék az exponenciális függvény sokszínű alkalmazását. Közelebbinek érezhetik a tananyagot, ha azt a valós életből vett példákon keresztül szemléltetjük. Értelmet nyernek a matematikai kifejezések a mindennapi életben.)

5.8. Logarléc, logaritmikus koordinátarendszer

5.8.1. Logarléc története

A logaritmust John Napier vezette be, hogy megkönnyítse a szorzást és a hatványokkal való számolást. Az új módszerre, a Rudolf-féle táblázatokra, illetve a Napier-csontokra, nagy szüksége volt a csillagászoknak, fizikusoknak, archeológusoknak is, ezek az eszközök voltak a logarléc elődjei. Végül 1620-ban Edmund Gunter, angol matematikus volt az első, aki a mai formájához hasonló logaritmikus számolólécet tervezett.

34. ábra: A logarléc elődje [21]

A logarléccel a számok szorzását összeadásra vezetjük vissza. Ennek „kézi” változata a „Négyjegyű függvénytáblázatok” alkalmazása. Vagyis a számok szorzatát a számok logaritmusának összegzésével, a számok hányadosát a számok logaritmusának különbségével számítjuk ki. Ezek képlettel kifejezve a következő módon írhatók le:

$$lg\, x + lg\, y = lg(xy)$$

$$lg\, x - lg\, y = lg(x/y)$$

Számítsuk ki pl. a $2{,}34 \cdot 3{,}52$ szorzatot. Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó logaritmus azonosságot: $\lg(2{,}34 \cdot 3{,}52) = \lg(2{,}34) + \lg\,(3{,}52) \approx 0{,}3692 + 0{,}5465 = 0{,}9157$.

Innen (a táblázatból visszakeresve) kapjuk, hogy $2{,}34 \cdot 3{,}52 \approx 10^{0{,}9157} = 8.2357$. A pontos érték: $2{,}34 \cdot 3{,}52 = 8{,}2368$.

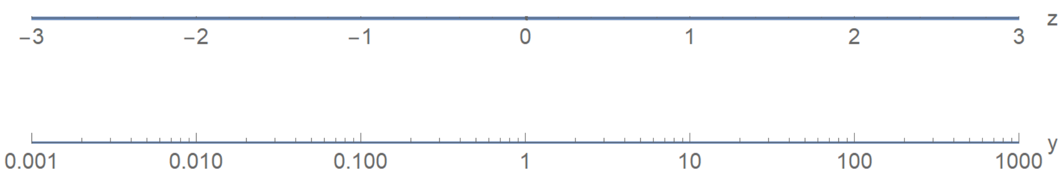
Ezt a módszert automatizálja a logarléc a „logaritmikus skála” segítségével. Bár az analóg logarlécet a digitális számítások kiszorították, a logaritmikus skálák szerepe fontos marad az exponenciális változások felismerésében.

35. ábra: Logarléc

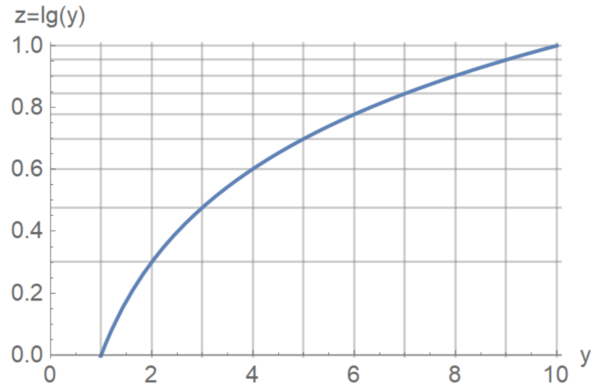
5.8.2. Logaritmikus skála

A logaritmikus skálának az egyik legnagyobb előnye, hogy nagyon kicsi és nagyon nagy mennyiségeket egyszerre tudunk rajta szemléltetni. Erre példa lehet a különböző rádióhullámok, a különböző szférák a Föld légkörében, radioaktív sugárzások. Felhasználása széleskörű, nem csak a tudósok használják, hanem a mindennapi életben is lehet vele találkozni, pl.: a Földtörténet évszámai, földrajzi atlaszokban, Richter-skála, statisztika, pH, entrópia, részecskék méretei, csillagok fényerőssége. Az emberi érzékszervek közül is több logaritmikus működésű.

Ábrázoljuk a $z = lg\, y$ értékeket a szokásos egyenletes skálán, például $z = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. De minket nem a „z”, hanem az „y” értékek érdekelnek, ezért írjuk helyettük írjuk a megfelelő $y = 10^z$ értékeket:

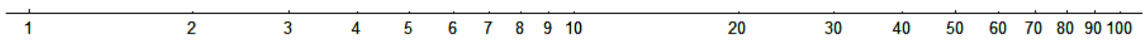


Általában, ha „y” adott, akkor a skálára a „z” értéket mérjük fel, de az „y”-t írjuk mellé:



36. ábra: $\{y, z\}$ koordináta-rendszer

Így kapjuk a logaritmikus skálát. Vegyük észre, hogy a 10 hatványai közti távolságok azonosak.



37. ábra: Logaritmikus skála

5.8.3. Szorzás Logarléccel

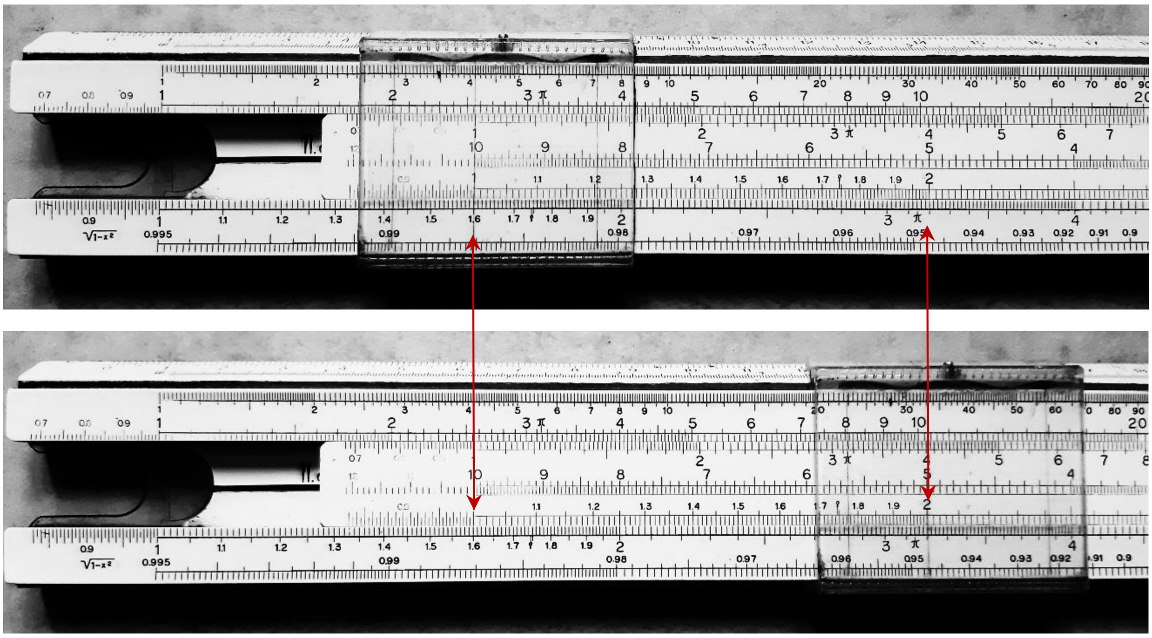
Szorzáshoz az $lg\, x + lg\, y = lg(xy)$ azonosságot használjuk a következő módon. Két logaritmikus skálát vegyünk (fix és mozgó). A fix skálán beállítjuk az „x” értéket a mozgatható nyelvvel, majd ehhez illesztjük a mozgó skála kezdő értékét, az 1-et. Ezután a mozgó skálán az „y” értékéhez mozgatjuk a nyelvet, és alatta a fix skálán leolvassuk a szorzatot. Mivel a skálák logaritmikusak, valójában az $lg\, x + lg\, y$ értéket számoltuk ki.

A logarléc használata gyakorlatot igényel, ugyanis nagy (vagy kicsi) számok esetén szükséges a normál alak ismerete és rutinszerű alkalmazása. Emellett a számolási pontosság nagymértékben függ a leolvasás pontosságától.

13. Példa

Számítsuk ki a logarléc segítségével a $1{,}6 \cdot 2$ értéket!

Ebben az esetben a felső skála elejét (1-es), oda kell tolnunk az alsó skála az első szorzótényezőhöz, ami jelen esetben a 1,6. Az eredményt az alsó skálán tudjuk majd leolvasni. Az egyes alatt a 1,6 áll, ugyanis $1 \cdot 1{,}6 = 1{,}6$. A kívánt szorzat eredményét az alsó skáláról tudjuk leolvasni, pontosan a 2-es szám alatt. Az eredmény pontossága nagyban függ attól, hogy mennyire pontosan tudjuk beállítani a skálát. Láthatjuk, hogy a szorzat a 3,2.

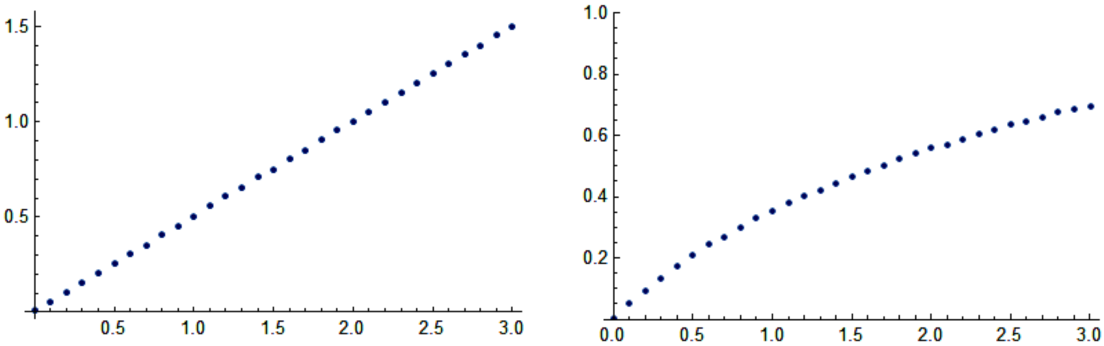


38. ábra: $1{,}6 \cdot 2$ kiszámítása logarléccel

A második azonosságot pedig az osztáshoz lehet használni, mégpedig úgy, hogy a nyelven (mozgó skálán) meg kell keresni az osztót, ezt szembe kell állítani a fix skálán az osztandóval, és a nyelv kezdeti értékénél találjuk a fix skálán a hányados értékét.

5.9. Logaritmikus koordinátarendszerek, exponenciális függvények kiegyenesítése

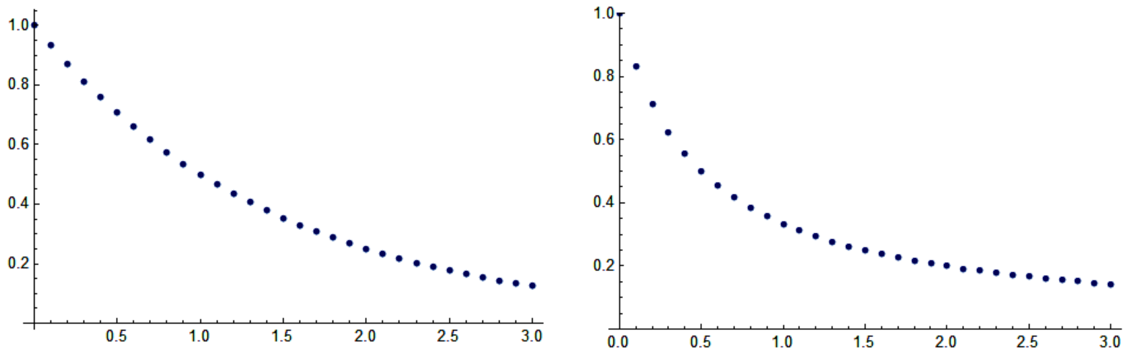
Egy könnyen eldönthető kérdés: melyik adatsor lineáris az alábbi ábrán?



39. ábra: Egy könnyen eldönthető kérdés

Mindenkinek egyértelmű, hogy a bal oldali adatsor a lineáris.

Most viszont egy közel sem triviális kérdés következik: az alábbi adatsorok közül melyik az exponenciális?



40. ábra: Egy nehezebben eldönthető kérdés

Oktatási tapasztalataink szerint, az esetek nagy részében a megkérdezettek a jobb oldali ábrát választaná, mint exponenciális alakzatot. Azonban az nem más, mint az $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ függvény pontjai. A bal oldali grafikonon pedig tényleg egy exponenciális függvény, az $f(x) = 2^{-x}$ pontjait ábrázolja.

Ezt a kérdést viszont egyszerűen is el lehet dönteni, amennyiben tudatában vagyunk annak, hogy az exponenciális függvény logaritmusa lineáris függvény, aminek képe egy egyenes.

Tekintsük például az $y = 10^{ax+b}$ alakú exponenciális függvényt.
Innen $z = lg\, y = ax + b$. Vagyis az $\{x, y\} \to \{x, lg\, y\} = \{x, z\}$ transzformáció az exponenciális függvény grafikonját (illetve az adatsort) lineáris függvénnyé transzformálja. Másként mondva, az $lg\big(f(x)\big)$-et ábrázoljuk x függvényében. Az eljárást egy konkrét példán mutatjuk be.

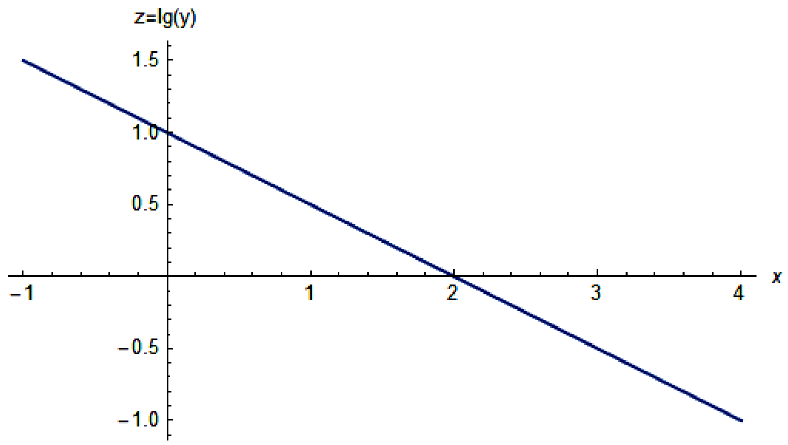
Tekintsük az alábbi függvényt:

$y = 10^{-0,5x+1}$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

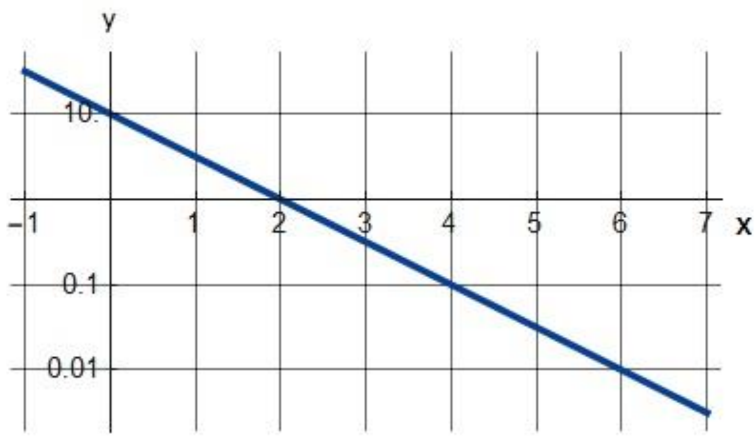
$z \coloneqq lg\, y = -0,5x + 1$

ahol $z = lg\, y$. Ezt a lineáris függvény könnyedén tudjuk ábrázolni.



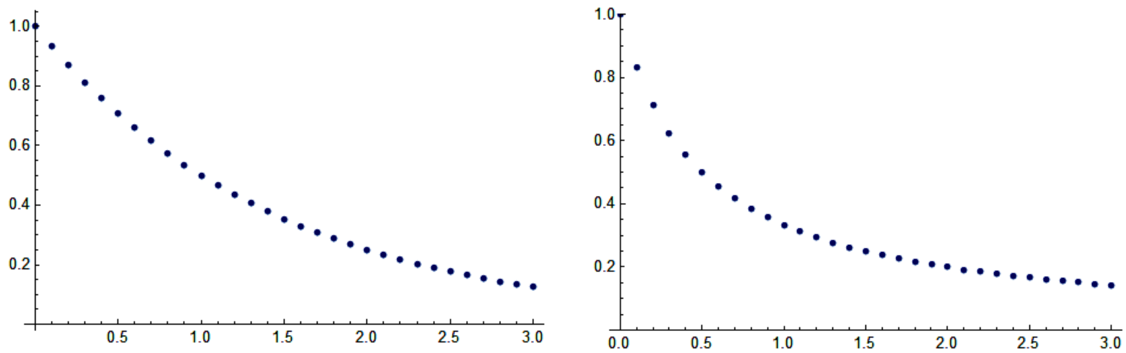
41. ábra: $z \coloneqq lg\, y = -0{,}5x + 1$

Ugyanakkor, nem az $z = lg\, y$ értékek, hanem az y értékek érdekesek. Ezért a „z” értékek helyett a megfelelő „y” értékeket írjuk a tengelyhez, vagyis ismét a logaritmikus skálához jutunk. Így kapjuk az ún. szemilogaritmikus vagy lin-log koordináta-rendszert.



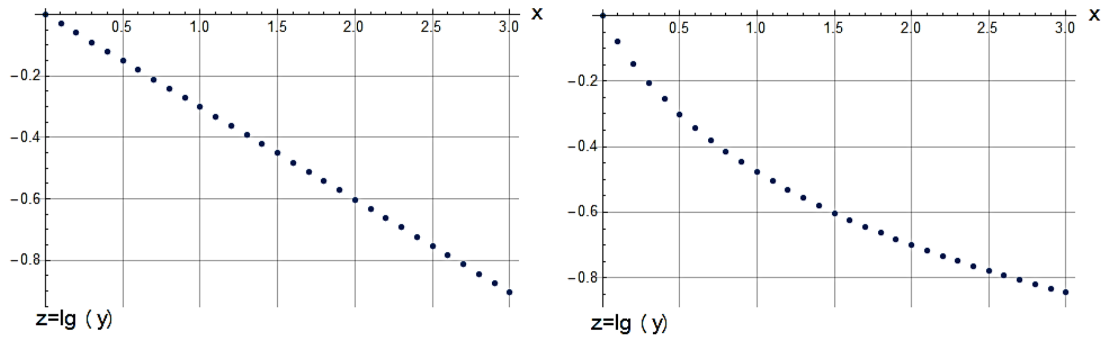
42. ábra: $\{x, y\}$ koordináta-rendszer

A probléma megfordítható. Adott grafikonról kell eldöntenünk, exponenciális függvény grafikonja-e? Például tekintsük a fentebb tekintett grafikonokat.



43. ábra: Melyik az exponenciális adatsor?

Ábrázoljuk őket lin-log rendszerben!



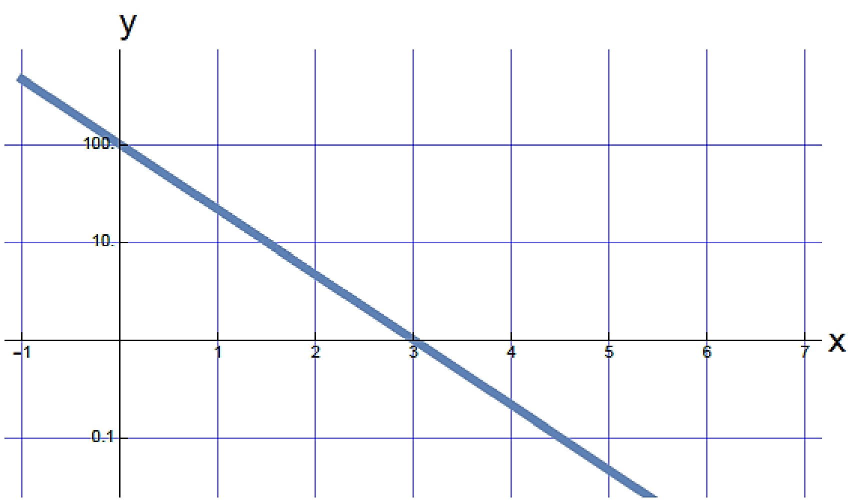
44. ábra: Lin-log koordiáta-rendszer

Láthatjuk, hogy a lin-log koordináta-rendszerben a bal oldali adatsor egy egyenes lett, vagyis azt egy exponenciális függvénnyel le tudjuk írni.

Ez a probléma igen gyakran felmerül a természettudományokban. Valamilyen (gyógyszerkiürülés, szaporodás, stb.…) folyamatról el kell dönteni, hogy exponenciális függvény írja-e le. Ekkor a logaritmikus ábrázolás segít. Ráadásul a grafikonról a képlet is egyszerűen leolvasható.

14. Példa

Tekintsük az alábbi grafikont, amely lin-log koordinátarendszerben van ábrázolva.



45. ábra: 14. Példa

A grafikonról leolvasható az egyenes egyenlete, amiből a $z = lg\, y$ ismeretében y kifejezhető: $y = 10^z$. Tudjuk, hogy egy egyenes egyelete $y = mx + b$ alakú. Az egyenes az y tengelyt 10^2-nál metszi, vagyis ebből adódik, hogy $b = 2$. A meredekséget pedig a $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ összefüggéssel tudjuk megállapítani, $m = \frac{2}{3}$. Most már felírhatjuk az egyenletet:

$$z = \frac{2}{3}x + 2$$

$$lg\, y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = 10^{\frac{2}{3}x+2}$$

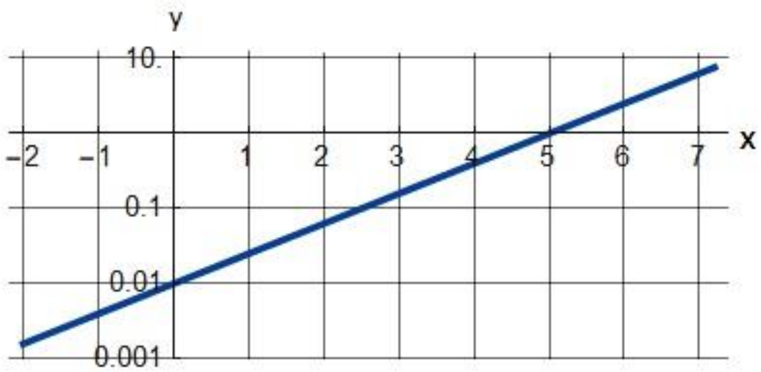
További gyakorló feladatok:

15. Feladat

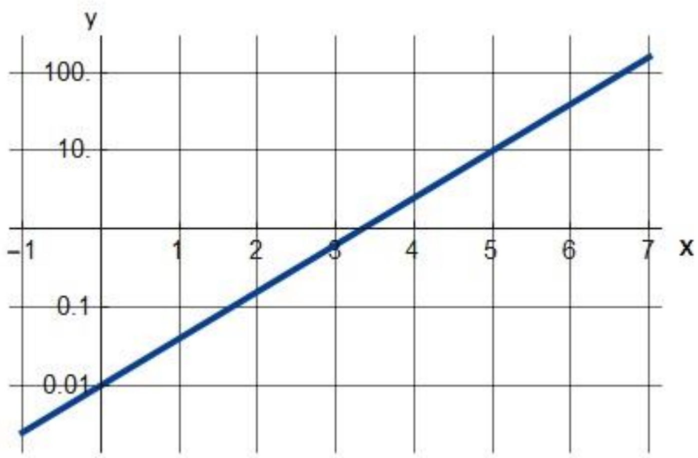
Ábrázold az $y = 100^{-0,5x-2}$ és az $y = 10^{2x+1}$ függvényeket lin-log koordinátarendszerben!

16. Feladat

Írd fel az alábbi grafikonokkal megadott függvények képletét!



46. ábra: 16. Feladat



47. ábra: 16. Feladat

5.10. Exponenciális egyenletekről: gyógyszer-adagolási modell

Középiskolákban számos módszert tanítanak az exponenciális egyenletek megoldására. A módszereket ismertetik, megtanítják, de az exponenciális egyenletek motivációjáról nem esik szó, hogy hol lehet ezekkel találkozni a mindennapi életben, illetve milyen folyamatokat írnak le.

1. Típus: Azonos alapú hatványokra visszavezethető exponenciális egyenletek

Egyszerű egyenletek, hatványértékek felismerésével vagy logaritmus alkalmazásával megoldhatók

Arról lehet felismerni őket, hogy azonos alapú hatványokra visszavezethetők, és közöttük csak szorzás és osztás van. Példa: $\frac{1}{8}\sqrt{4^{3x-1}} = 8^4$

Ennél a típusnál a megoldás alapja, hogy tudjuk, hogy $a^0 = 1, ha\ a \neq 0, a \in \mathbb{R}$. Példa: $3^{5x-2} = 1$

2. Típus: Azonos alapú exponenciális egyenletek

Alaptípus: az azonos alapra visszavezetés bonyolultabb esetekben az egyedüli célravezető módszer. Arról ismerhetők fel, hogy egy szám hatványainak összege vagy különbsége szerepel benne. Példa: $2^x + 2^{x-3} = 18$

3. Típus: Különböző alapú exponenciális egyenletek szorzással

Azonos alapra visszavezetés átosztással.

Példa: $125 \cdot 3^{x-1} = 3 \cdot 5^{x+1}$

4. Típus: Különböző alapú exponenciális egyenletek összeadással konstans tag nélkül

Lényegében azonos az előző típussal.

Példa: $4^x - 6 \cdot 3^x = 0$

5. Típus: Különböző alapú exponenciális függvények összeadással és konstans taggal

Ez a legnehezebb típus, csak speciális esetekben oldható meg szimbolikus eszközökkel.

$$4^x - 6 \cdot 3^x = 1$$

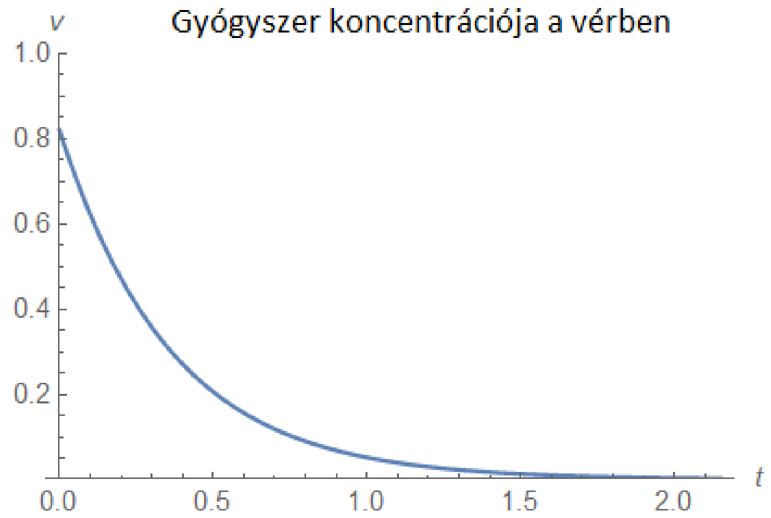
Ilyen speciális eset a *másodfokú egyenletre visszavezethető exponenciális egyenletek* esete.

Ha egy hatvány és annak a négyzete is szerepel az egyenletben, akkor az egyenlet másodfokúra visszavezethető típusú. Példa: $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$

Az alábbiakban igazi valós életből jövő folyamatokat tekintünk, amellyel kapcsolatosan mindegyik példára élő motivációt adhatunk. Tekintsünk egy gyógyszer adagolását és felszívódását a szervezetben. A matematikai modellek taníthatók 12. osztályban emelt szinten, de ez egy másik dolgozat témája lenne. Itt csak a modellek tanulmányozása eredményeként kapott függvényeket vizsgáljuk meg.

5.10.1. Intravaszkuláris adagolás

Az orvos a gyógyszert injekció formájában közvetlenül a vérbe fecskendezi. Ezt nevezzük intravaszkuláris (érrendszerbe adott) adagolásnak. Feltételezzük, hogy a gyógyszer azonnal egyenletesen szétterjed a vérben, kifejti hatását és fokozatosan kiürül (elimináció). A kiürülés gyógyszerek esetén az alábbi: azonos időtartamok alatt a koncentráció azonos hányada ürül ki. Ennek eredményeként a koncentrációt csökkenő exponenciális függvény írja le.



48. ábra: Gyógyszer koncentrációjának változása a vérben (fiktív eset)

Ebben az esetben az orvos számára alapkérdés, mikor ér el egy adott értéket a gyógyszerkoncentráció? A folyamatot egy exponenciálisan csökkenő függvény írja le, vagyis itt vissza kell térnünk a logaritmusnál tanultakhoz, ahol az exponenciális függvény kitevőjét keressük. Ez a logaritmus alkalmazásával nyilvánvaló.

17. Példa

Az Aszpirin felezési ideje 1 grammos dózisnál 5 óra. A kiürülési folyamatot $f(t) = C_0 e^{-kt}$ függvény írja le, ahol a k az elinimációs rátát jelenti (legyen $k = 0{,}865$). Mikor csökken a vérben a gyógyszermennyiség a 10 %-ára?

5.10.2. Extravaszkuláris adagolás

A beteg tabletta formájában beveszi a gyógyszert, ami a gyomorba kerül. A gyógyszer a gyomorból felszívódik a vérbe (abszorpció), majd végül onnan kiürül (elimináció). Ezt a folyamatot extravaszkuláris (érrendszeren kívüli) gyógyszeradagoásnak nevezzük.

A gyógyszer nem közvetlenül az érpályába, illetve a véráramba történő alkalmazással juttatják be a szervezetbe, így a hatóanyag transzport illetve felszívódás révén jut el a hatás helyére. [6]

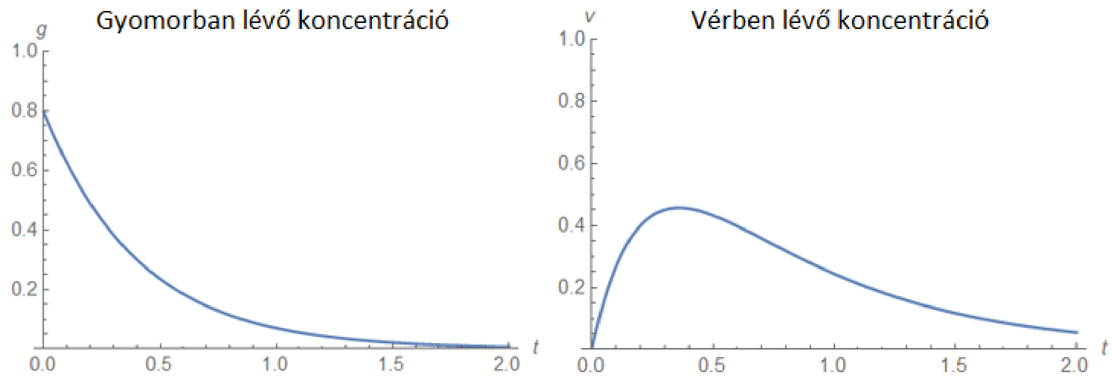
Alapséma:

$g(t)$: a gyógyszer koncentrációja a gyomorban a t pillanatban

$v(t)$: A gyógyszer koncentrációja a vérben a t pillanatban

Feltételezve, hogy a gyógyszer mind hasznosul, felszívódik a vérbe. α-val jelöljük az eliminációs, β-val pedig az abszorpciós rátát.

A következő ábra egy fiktív esetet szemléltet (α, β).



49. ábra: Gyomorban és vérben lévő koncentráció (fiktív eset)

A fenti esetben, felsőbb matematikai eszközökkel a következő módon lehet a gyógyszer koncentrációját leírni a gyomorban, illetve a vérben:

$$g(t) = 2^{-t\beta}x_0$$

$$v(t) = (-2^{-t\beta} + 2^{-t\alpha}) \cdot \frac{\beta}{\beta - \alpha} x_0$$

Ekkor felmerül a kérdés, hogy mikor ér el a vérben a gyógyszer-koncentráció egy bizonyos c_0 értéket? Vagyis a

$$2^{-\alpha t} - 2^{-\beta t} = c_0$$

egyenletet, *egy két exponenciális függvény különbségét tartalmazó egyenletet* kell megoldani. Algebrai egyenletre visszavezetés csak akkor lehetséges, ha az α *és* β értékek összemérhetők.

Először tegyük fel (fiktív eset ismét), hogy $\alpha = 0{,}2$ *és* $\beta = 0{,}1$. Ekkor a következőképp alakul az egyenlet:

$$2^{-0{,}2t} - 2^{-0{,}1t} = c_0,$$

ami visszavezethető egy másodfokú egyenletre:

$$(2^{-01t})^2 - 2^{-0{,}1t} = c_0$$

Ekkor bevezethetünk egy új $y = 2^{-01t}$ változót:

$$y^2 - y = c_0.$$

Ezt a másodfokú egyenletet könnyen meg tudjuk oldani.

További fontos kérdés, hogy mekkora lehet a c_0 érték? Nyilvánvaló, hogy nem lehet nagyobb, mint a függvény maximuma. Ebben az esetben, ez könnyen megadható. A másodfokú függvény képe egy parabola, amelynek az egyenletét csúcsponti egyenletté alakítva meg tudjuk határozni a szélsőértékét.

Először tegyük fel (fiktív eset), hogy $\alpha = 0{,}3$ *és* $\beta = 0{,}2$. Ekkor az egyenlet az alábbi alakú:

$$2^{-0{,}3t} - 2^{-0{,}2t} = c_0,$$

ami egy harmadfokú egyenletre vezethető vissza:

$$y^3 - y^2 = c_0.$$

Ez megoldható, de nem része a jelenlegi középiskolai tananyagnak (Cardano formula, harmadfokú egyenlet megoldóképlete [20]).

A maximális gyógyszerszint meghatározása itt már mélyebb ismereteket igényel (differenciálszámítás), ami az emelt szintű tananyag része a 12. osztályban.

Hívjuk fel a diákok figyelmét, hogy az $2^{-\alpha t} - 2^{-\beta t} = c_0$ egyenlet nem minden esetben megoldható! Most tegyük fel (ismét fiktív eset), hogy $\alpha = 0{,}5$ *és* $\beta = 0{,}2$. Ekkor az egyenlet az alábbi alakú:

$$2^{-0{,}5t} - 2^{-0{,}2t} = c_0,$$

amely egy ötödfokú egyenletre vezethető vissza:

$$y^5 - y^2 = c_0.$$

Mivel a negyedfokú egyenlet a legmagasabb fokú, amely általános alakban megoldható, így ezt algebrailag nem tudjuk megoldani [20].

A valós esetekben azonban a gyógyszer felszívódása és kiürülése nem ismeri a megoldóképleteket. Esélyünk sincs az algebrai megoldásra. A 12. osztályban, emelt szinten a differenciálszámítás kapcsán lehetne foglalkozni az egyenletek közelítő megoldásával (Newton iteráció).

Megjegyzés:

A matematikában és a természettudományokban az Euler-féle ,,e" szám ($e \approx 2{,}718$) *nagyon fontos szerepet játszik, így a gyógyszeradagolást leíró modellekben is. De az ,,e" szám bevezetése mélyebb ismereteket igényel, ezért az exponenciális függvények bevezetésénél még nem célszerű használni. Ezért az egyszerűség kedvéért a fenti modellekben a 2-es alapot használtuk.*

6. Összegzés

Szakdolgozatom során kérdőíves felmérést végeztem hallgatók között, vizsgáltam a középiskolás órák stílusa és tanártípus hatását a matematikához való hozzáállásra. Az eredmények azt mutatják, hogy a diákok nem tanulnak az egyes matematikai fogalmak, elemek gyakorlatias alkalmazásáról, arról, hogy számukra ez hol lehet az életben, illetve a továbbtanulásban hasznos. A felmérésem arra is rávilágított, hogy a hallgatók rettegnek annak a gondolatától is, hogy újra matematikát kelljen tanulniuk az egyetemen.

Dolgozatom következő részében a Nemzeti Alaptanterv matematikára és biológiára vonatkozó részeit vetettem össze. Hipotézisem beigazolódott, nincs összhangban ennek a két tantárgynak a tanítása a középiskola folyamán.

Több magyarországi és egy vajdasági tankönyvet hasonlítottam össze az exponenciális és logaritmus függvény témakörében, ahol azzal szembesültem, hogy néhány tankönyv nem fordít megfelelő hangsúly az alkalmazási feladatok tárgyalására.

Majd szakdolgozatom fő témája következik, az exponenciális és logaritmus függvények bevezetése középiskolában, főként biológiai motivációval. Ebben a fejezetben néhány általános számolási készséget ellenőrző feladat mellett, igyekeztem alkalmazásra vonatkozó példákat is megemlíteni, illetve a bevezetés is életszerű problémán keresztül történik. A diákok már rögtön az első órától kezdve láthatják, hogy hol találkozhatnak ezekkel a függvényekkel leírható folyamatokkal a mindennapi életben, valamint, hogy későbbi tanulmányaik során hol tudják hasznosítani ezt a tudást. Azok a részek, amelyek a szakdolgozatomnak nem képezik részét (pl.: technikai jellegű problémák), ugyanúgy tárgyalandók, mint a forgalomban lévő tankönyvekben.

Olyan anyagrészeket is belevettem a dolgozatomba, amelyek fakultációra vihetők be, illetve levezetésükhöz felsőbb matematikai eszközökre van szükség, mégis nagyon jó példák arra, hogy hogyan lehet modellezni néhány mindennapi folyamatot, például: intravaszkuláris és extravaszkuláris gyógyszeradagolás. Ezen kívül érdekességként szolgál a logarléc története, illetve, hogy hogyan lehetett számításokat elvégezni vele.

A mostani helyzetre való tekintettel az ország online oktatásra áll át, így a matematikát is, mint az összes többi tantárgy ismereteit a tanulóknak sokkal inkább saját maguk kell elsajátítani, mintha részt tudnának venni a tanórákon. Több segítség is készül számukra a lelkes tanároktól. Az Iskolatévé című műsor, 3. matematika adása a mértani sorozatokról, valamit az logaritmus és exponenciális függvényről szólt. Az előadó tanár a mértani sorozatokból indult ki, majd azokból tért át a logaritmusra, és a $\log_2 3$ kifejezés példáján vezette be az exponenciális függvényt. Érdekesnek tartom ezt a bevezetési sorrendet, viszont azt gondolom, hogy a logaritmus bevezetése előtt hiányzik az exponenciális függvény. Tulajdonképp alkalmazott a bevezetés előtt is exponenciális kifejezést, csak nem definiálta még.

Összegzésül, nagy és érdekes témakörnek tartom az exponenciális és logaritmusfüggvényt a középiskola folyamán, amelyet megfelelő módszerekkel bevezetve, meg lehet szerettetni a diákokkal, és látni fogják azt is, hogy milyen hasznuk származhat ebből a tudásukból.

Hivatkozások, irodalom

[1] Csordás Mihály, Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János Dr., Vincze István: Sokszínű matematika 11, Mozaik Kiadó

[2] Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika 11, Nemzeti Tankönyvkiadó

[3] Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Dr. Simon Judit: Matematika 11, Az érthető matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó

[4] Dömel András, Korányi Erzsébet, Marosvári Péter: Matematika 11, Kísérleti tankönyv, Nemzeti Tankönyvkiadó

[5] Csikós Pajor Gizella, Dr. Péics Hajnalka: Analízis

[6] http://www.sotepedia.hu/_media/gytk/targyak/biofarm_definicio_2.pdf,utolsó megtekintés: 2019.12.07.

[7] Nemzeti Alaptanterv (https://ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf, utolsó megtekintés: 2019.12.07.)

[8] Kerettanterv (http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/kerettanterv/korrekturas/gimnazium/g06_matematika.doc, utolsó megtekintés: 2020.01.09.)

[9] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó,Budapest, 1995

[10] Hortobágyi István – Marosvásári Péter – Pálmay Lóránt – Pósafi Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I-II., Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2003

[11] www.oktatas.hu

[12] www.nefmi.gov.hu

[13] Gyíres K, Fürst Zs.: Farmakológia, Medicina Könyvkiadó, Budapest 2007

[14] Bagota Mónika, Kovács Zoltán, Krisztin Német István: Matematikai praktikum feladatgyűjtemény, Szegedi Egyetemi Kiadó – Polygon, 2010

[15] Hatvani László, Pintér László: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában, Szegedi Egyetemi Kiadó – Polygon, 1997

[16] Ruff János, Schultz János: Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11-12. évfolyam, Maxim Könyvkiadó Kft., 2012

[17] Karsai János: Matematika gyógyszerészhallgatók számára, egyetemi jegyzet

[18] Szalkai István: Mit tudhat egy számolóléc?, KöMaL 1977.

[19] Szalkai István: Szokatlan koordinátarendszerek, avagy linearizáló módszerek, Pannon Egyetem, Veszprém, 2015 (http://math.bme.hu/~hujter/150821.pdf, utolsó megtekintés: 2020.02.18.)

[20] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába, Typotex Kiadó, 2014

[21] https://cms.sulinet.hu/get/d/5a0bf176-5943-4d96-bd75-6532370edeca/2/1/b/Normal/normal.png%20%20(9 (34. ábra)

I. Melléklet. Kérdőívek

I.1. Év eleji kérdőív

1. Milyen szakra jársz?

- ☐ biológus
- ☐ gyógyszerész
- ☐ földrajz
- ☐ mérnöki
- ☐ fizika, kémia, informatika
- ☐ egészségügyi
- ☐ bölcsésztudományi
- ☐ egyéb

2.Életkorod?

- ☐ 0-18
- ☐ 19-22
- ☐ 23-26
- ☐ 27-30
- ☐ 31-35
- ☐ 35+

3. Jelöld be, hogy mennyire igazak az állítások a középiskolás tapasztalataid alapján! Mindegyik állítást pontozd!

0-egyáltalán nem, 4 - teljesen igaz

- Szeretem a matematikát
- Megfelelő a matek oktatása a középiskolában
- Jó volt a matektanárom
- Életszerű feladatokat is oldottunk meg
- Beszéltünk a matek más tantárgyakban való felhasználásáról
- Értettem az anyagot
- Érdekesek voltak az órák

4. Volt-e lehetőség a versenyzésre?

- ☐ Igen, versenyeztem
- ☐ Igen, de nem akartam
- ☐ Nem
- ☐ Nem, de nem is szerettem volna

5. Milyen versenyeket szerettél? (ha jártál versenyre)

- ☐ Tesztes
- ☐ Kifejtős
- ☐ Csapatverseny
- ☐ Egyéb

6. Volt-e matekszakkör a középiskolában?

- ☐ Volt, jártam is rá

- ☐ Volt, de nem vettem részt rajta
- ☐ Nem
- ☐ Nem, de nem is érdekelt volna

7. Melyik/melyek a kedvelt témaköreid matematikából? (ha van ilyen)

- ☐ Algebra
- ☐ Függvények
- ☐ Valószínűségszámítás, statisztika
- ☐ Geometria
- ☐ Kombinatorika
- ☐ Egyéb

8. Mit gondoltál, amikor megtudtad, hogy az egyetemen ismét matekot kell tanulnod? Mindegyik állítást pontozd!

0 - abszolút nem igaz, 4 - teljes mértékben igaz

- Örültem
- Féltem tőle
- Kíváncsian vártam

9. Mik az elvárásaid az egyetemi matematika kurzussal kapcsolatban?

I.2. Év végi kérdőív

1. Milyen szakra jársz?

- ☐ biológus
- ☐ gyógyszerész
- ☐ egyéb

2. Életkorod?

- ☐ 0-18
- ☐ 19-22
- ☐ 23-26
- ☐ 27-30
- ☐ 31-35
- ☐ 35+

3. Emlékeid szerint mit gondoltál, amikor megtudtad, hogy az egyetemen ismét matekot kell tanulnod? Mindegyik állítást pontozd! 0 - abszolút nem igaz, 4 - teljes mértékben igaz

- Örültem
- Féltem tőle
- Kíváncsian vártam

4. Most mit érzel ezzel kapcsolatban? Mindegyik állítást pontozd!

0 - egyáltalán nem igaz, 4 - teljesen igaz

- Felesleges félni tőle
- Hasznos kurzus

- Örülök, hogy volt ilyen

5. Mennyire igaz rád az állítás az egyetemi tapasztalataid alapján! Mindegyik állítást pontozd!

   0 - egyáltalán nem, 4- teljesen igaz

   - Szeretem a matematikát
   - Megfelelő a matek oktatása az egyetemen
   - Jó volt a matektanárom
   - Életszerű feladatokat is oldottunk meg
   - Beszéltünk a matek más tantárgyakban való felhasználásáról
   - Értettem az anyagot
   - Érdekesek voltak az órák

6. Írd le a véleményedet az egyetemi matematika kurzusodról!

7. Emlékeid szerint mennyire igazak az állítások a középiskolás tapasztalataid alapján! Mindegyik állítást pontozd!

   0- egyáltalán nem, 4 - teljesen igaz

   - Szeretem a matematikát
   - Megfelelő a matek oktatása a középiskolában
   - Jó volt a matektanárom
   - Életszerű feladatokat is oldottunk meg
   - Beszéltünk a matek más tantárgyakban való felhasználásáról
   - Értettem az anyagot
   - Érdekesek voltak az órák

II. Melléklet. Középszintű érettségi feladatok

A feladatok között 7 típust lehet elkülöníteni az exponenciális és a logaritmus témakörön belül:

1. Exponenciális függvény
2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek
3. Logaritmus definíciója
4. Logaritmus azonosságai
5. Logaritmusfüggvény
6. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek
7. Alkalmazási feladatok

II.1. Exponenciális függvény

<u>2010. október 19. (2 pont)</u>

Milyen valós számokat jelöl az a, ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett

$x \to a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő?

II.2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

2016. május 9. (2 pont)

Oldja meg a következő egyenletet!

$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

2007. október 25. (4+8 pont)

a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?

$$5^{x-2} < 5^{13-2x}$$

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$$

2011. május 3. (1+1 pont)

Adja meg az alábbi két egyenlet valós gyökeit!

a) $5^{2x} = 625$
b) $2^y = \frac{1}{32}$

2012. május 8. (2 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

2013. május 7. (4 pont)

Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha$4 \cdot 3^x + 3^x = 20$.

2016. október 18. (6 pont)

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

b) $9^{x+1} - 7 \cdot 9^x = 54$

2018. május 8. (2 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát tizedes tört alakban adja meg!

$$4^x = 8$$

II.3. Logaritmus definíciója

2007. október 25. (2 pont)

Melyik a nagyobb: $A = sin\frac{7\pi}{2}$ vagy $B = log_2\frac{1}{4}$?

2009. május 5. (2 pont)

Adja meg a $log_3 81$ kifejezés pontos értékét!

2011. május 3. (2 pont)

Melyik szám nagyobb?

$A = lg\frac{1}{10}$ vagy $B = cos8\pi$

2012. május 8. (3 pont)

Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $lg_2 x^2 = 4$

Válaszát indokolja!

II.4. Logaritmus azonosságai

2006. február 21. (2 pont)

Mekkora x értéke, ha $\lg x = \lg 3 + \lg 2$

2007. október 25. (2 pont)

Adja meg a $lgx^2 = 2lgx$ egyenlet megoldáshalmazát!

2010. május 4. (2 pont)

Az $R^+ \to R, x \to \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

a) $R^+ \to R, x \to 3\log_2 x$
b) $R^+ \to R, x \to \log_2(8x)$
c) $R^+ \to R, x \to \log_2(3x)$
d) $R^+ \to R, x \to \log_2 x^3$

2016. október 18. (2 pont)

Adja meg a következő összeg értékét: $log_6 2 + log_6 3$.

II.5. Logaritmusfüggvény

2011. október 18. (2 pont)

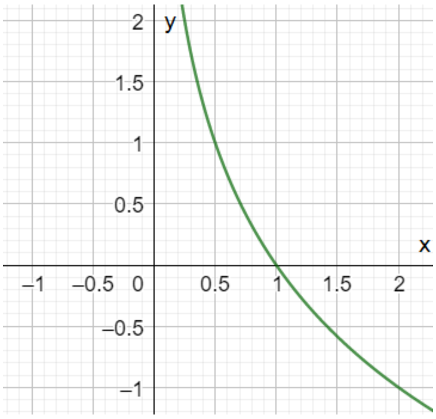
István az $x \to log_{\frac{1}{2}} x$, $x > 0$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).

Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

A) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

B) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

C) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1.



II.6. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek

2005. október 25. (6 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet!

$\log_3 \sqrt{x+1} + 1 = 2$ x valós szám, és $x \geq -1$

6 pont

2006. május 9. (2+2+1 pont)

Adott a következő egyenletrendszer:

(1) $2\lg(y+1) = \lg(x+11)$
(2) $y = 2x$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a P(x;y) pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet!
b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet?
c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!
d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használtderékszögű koordináta-rendszerben!

2008. május 8. (6+6 pont)

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $lg(x+15)^2 - lg(3x+5) = lg2$
b) $25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$

2008. október 21. (7 pont)

Határozza meg az alábbi egyenlet valós megoldásait!

$(log_2 x - 3)(log_2 x^2 + 6) = 0$

2014. május 6. (2 pont)

Adja meg az x értékét, ha $log_2(x+1) = 5$.

2014. október 14. (1+2 pont)

a) Milyen valós számokra értelmezhető a $log_2(3-x)$ kifejezés?

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$log_2(3-x)=0$$

II.7. Alkalmazási feladatok

2006. október 25. (4+5+8 pont)

A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet: $É = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$.

A képletben az É a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt?
b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?
c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)?

2008. május 6. (3+10+4 pont)

A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott?

A Nagy család a B Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.)

2008. október 6. (5+7 pont)

Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.

Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8%-kal kamatozik.

a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8%? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.)

Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.

b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

<u>2010. május 4. (4+4+4+5 pont)</u>

Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4%-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben. 2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben?
b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben?

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során?
d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3%-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76%-a?

<u>2011. május 3. (4+6+7 pont)</u>

Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $lg\, p_m = 0{,}8 \cdot lg p_v + 0{,}301$ összefüggés áll fenn.

A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?

b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?

c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást?

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

<u>2011. október 18. (4 pont)</u>

A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne

4024 euróra? Megoldását részletezze!

2012. október 12. (11+6 pont)

Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.

a) Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben?

A mobiltársaság Telint néven új mobilinternet csomagot vezet be a piacra január elsején. Januárban 10 000 új előfizetőt várnak, majd ezután minden hónapban az előző havinál 7,5%-kal több új előfizetőre számítanak. Abban a hónapban, amikor az adott havi új előfizetők száma eléri a 20 000-et, a társaság változtatni szeretne a Telintű csomag árán.

b) Számítsa ki, hogy a tervek alapján melyik hónapban éri el a Telint csomag egyhavi új előfizetőinek a száma a 20 000-et!

2019. május 7. (5+3+5+4 pont)

Péter elhatározza, hogy összegyűjt 3,5 millió Ft-ot egy használt elektromos autó vásárlására, mégpedig úgy, hogy havonta egyre több pénzt tesz félre a takarékszámláján. Az első hónapban 50 000 Ft-ot tesz félre, majd minden hónapban 1000 Ft-tal többet, mint az azt megelőző hónapban. (A számlán gyűjtött összeg kamatozásával Péter nem számol.)

a) Össze tud-e így gyűjteni Péter 4 év alatt 3,5 millió forintot?

A világon gyártott elektromos autók számának 2012 és 2017 közötti alakulását az alábbi táblázat mutatja.

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	110 000	221 000	409 000	727 000	1 186 000	1 928 000

b) Szemléltesse a táblázat adatait oszlopdiagramon!

Péter az előző táblázat adatai alapján olyan matematikai modellt alkotott, amely az elektromos autók számát exponenciálisan növekedőnek tekinti. E szerint, ha a 2012 óta eltelt évek száma x, akkor az elektromos autók számát (millió darabra) megközelítőleg az $f(x) = 0{,}122 \cdot 2^{0{,}822x}$ összefüggés adja meg.

c) A modell alapján számolva melyik évben érheti el az elektromos autók száma a 25 millió darabot?

Egy elektromos autókat gyártó cég öt különböző típusú autót gyárt. A készülő reklámfüzet fedőlapjára az ötféle típus közül egy vagy több (akár mind az öt) autótípus képét szeretné elhelyezni a grafikus.

d) Hány lehetőség közül választhat a tervezés során? (Két lehetőség különböző, ha az egyikben szerepel olyan autótípus, amely a másikban nem.)

III. Melléklet. Emelt szintű érettségi feladatok

A emelt szintű érettségi feladatok között a következő témakörök találhatók meg:

1. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek
2. Logaritmus definíciója
3. Logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek
4. Alkalmazási feladatok

III.1. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

2006. október 25. (6 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^x = 3^{2x+1}$$

2014. október 14. (7 pont)

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

b) $25^{lgx} = 5 + 4 \cdot 5^{lgx}$

2014. május 6. (5 pont)

c) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x 3 \cdot 2^x = 0$egyenletnek nincs valós gyöke!

III.2. Logaritmus definíciója

2007. május 8. (11 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin\frac{\pi}{2} - lg1 + 2^{\log_2 9}$$

2012. október 16. (3+5+5 pont)

Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(log_2\sqrt{x}\right)$
b) $\sqrt{log_2(\cos x)}$
c) $log_{\sqrt{x}}(cos^2 x)$

III.3. Logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

<u>2005. október 25. (16 pont)</u>

Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\log_x(x^2y^3) + \log_y(x^3y) = 9$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 0$$

<u>2006. május 9. (9 pont)</u>

Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

lg(x + y) = 2lg x

lg x = lg 2 + lg(y - 1)

<u>2007. október 25. (5 pont)</u>

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

lg(x + 7) + lg(3x + 1) = 2

<u>2008. október 21. (5 pont)</u>

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x-2)\cdot \lg(x^2-8) = 0$$

<u>2009. október 20. (4+7 pont)</u>

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0{,}5^{2-\log_{0{,}5} x} = 3$, ahol $x > 0$ és $x \epsilon R$
b) $7 + 6\log_2 x$, ahol $1 < x \leq 2$ és $x \epsilon R$

<u>2011. október 18. (13 pont)</u>

Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá$x > 0, x \neq 1$ és $y > 0, y \neq 1$.

$$\log_x y + \log_y x = 2$$

$$\sin(2x+3y) + \sin(4x+y) = 1$$

<u>2014. május 6. (11 pont)</u>

Jelölje H a $\sqrt{5{,}2 - x} \leq 3$egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $log_b 2^6$kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a H ∩ B és a B\ H halmazt!

III.4. Alkalmazási feladatok

<u>2005. október 25. (5+9 pont)</u>

Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.

a) Mekkora összeget kapott Péter?

b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára?

<u>2007. október 25. (3+4+5 pont)</u>

Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1 000 000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy a forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg.)

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen a kedvezőbb? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

(A tőkésítés melletti befektetés azt jelenti, hogy a tőkésítési időszak alatt elért kamatot az időszak végén hozzáadják az időszak kezdetén befektetett tőkéhez, és a következő időszakban az így kapott, kamattal megnövelt összeg után számítják a kamatot. Ez a folyamat annyiszor ismétlődik, ahány tőkésítési időszak van a befektetés időtartama alatt.)

<u>2008. október 21. (8+8 pont)</u>

Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét.

A bank az év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is:

Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

Nyilatkozat

Alulírott Horti Krisztina kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2020. április 28.

Horti Krisztina

....

Horti Krisztina