2. Povezivanje primera iz realnog života i matematike

2.3. Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je realna funkcija jedne promenljive, definisana za sve realne brojeve. Njen oblik je $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Štednja novca

Štediša je uložio 5000 dinara u jednu domaću banku. Banka mu nudi 4% kamate na godišnjem nivou na uloženi novac.

- Napraviti matematički model koji opisuje štednju novca u banci na godišnjem nivou.
- Koliko će novca imati štediša nakon 6 meseci a koliko posle jedne godine?
- Koliko će novca imati štediša nakon 11 godina?
- Ako se uloženi novac kamati mesečno u toku jedne godine koliki je interes?
- Koliko otprilike treba vremena da bi se uložena suma udvostručila?
- Koliko puta je veći interes ako je suma oročena sa 6% kamate na jednu godinu?
- Da li je bolje uložiti novac sa 4% godišnje kamate sa godišnjim kapitalisanjem ili 4% godišnje kamate sa mesečnim kapitalisanjem?
- Analiziraj na grafiku funkcije kako se menja interes na uloženu sumu sa povećanjem godina

Rešenje problema „Štednja novca"

Ovaj zadatak je detaljno rešen uz detaljna metodička uputstva za primenu modeliranja u nastavi matematike.

Realna situacija u ovom zadatku se odnosi na štednju novca.

Prelaz iz prve u drugu fazu procesa modeliranja podrazumeva pojednostavljivanje problema. Posle razumevanja i pojednostavljena situacije iz realnog života, učenici prelaze na sledeću fazu procesa modeliranja. Da bi bolje razumeli vezu između kamatne stope i količine novca na računu posle izvesnog vremena, kao i da bi im bilo jednostavnije da dođu do opšte formule, nastavnik treba da se bazira na prvo pitanje u navedenom zadatku.

Faza problema iz realnog života

Štediša je uložio 50000 dinara u jednu domaću banku. Banka mu nudi 4% kamate na godišnjem nivou na uloženi novac.

- Napraviti matematički model koji opisuje štednju novca u banci na godišnjem nivou.

Učenici treba samostalno ili uz pomoć nastavnika da dođu do opšte formule kamatnog računa. Na samom početku učenici treba da označe ključne reči i da ih povežu sa predhodno obrađenim lekcijama. Neophodno je da učenici uoče problem iz realnog života koji je ustvari i matematički problem koji sadrži jasne matematičke predpostavke. Realni problem je, takođe, pojednostavljen da bi bio primeren učeničkom nivou a da istovremeno ne izgubi smisao.

Pretpostavke u problemu su bile kamata na godišnjem nivou i početni kapital. Učenici su trebali da prepoznaju promenljive, odnosno šta je zavisna a šta nezavisna promenljiva. Da bi rešili zadatak učenici bi trebali da rešavaju problem korak po korak, računajući količinu novca na računu posle jedne, dve, tri godine. To se može prikazati na sledeći način:

$$5000\ din \ldots\ldots\ldots\ldots 100\%$$
$$x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 104\%$$

Posle prve godine štednje učenici mogu da dođu do sledećeg zaključka:

$x = 5200$ или $5000 \cdot 1.04 = 5200$ što predstavlja kapitak na računu u banci posle jedne godine. Nastavljajući račun za svaku sledeću godinu dobijaju se sledeći rezultati:

$n = 2\ godine\ \ 5200 \cdot 1.04 = 5408$

$n = 3\ godine\ \ 5408 \cdot 1.04 = 5624.32$

$n = 4\ godine\ \ 5624.32 \cdot 1.04 = 5849.29$

$n = 5\ godina\ \ 5849.29 \cdot 1.04 = 6083.26$

$n = 6\ godina\ \ 6083.26 \cdot 1.04 = 6326.59$

$n = 7\ godina\ \ 6326.59 \cdot 1.04 = 6579.65$

$n = 8\ godina\ \ 6579.65 \cdot 1.04 = 6842.84$

$n = 9\ godina\ \ 6842.84 \cdot 1.04 = 7116.55$

$n = 10\ godina\ \ 7111.22 \cdot 1.04 = 7401.22$

$n = 11\ godina\ \ 7401.22 \cdot 1.04 = 7697.26$

Posle 11 godina, ukupan iznos na računu će biti 7401.22 dinara.

U ovoj fazi modeliranja uočljivo je da se količina novca povećava po određenom pravilu i da je to pravilo neophodno opisati matematičkom formulom. Ako se pojednostave predhodni koraci, dobija se:

$5000 \cdot 1.04 \; za \;\; prvu \;\; godinu$

$5000 \cdot 1.04 \cdot 1.04 \; za \;\; drugu \;\; godinu$

$5000 \cdot 1.04 \cdot 1.04 \cdot 1.04 \; za \;\; prvu \;\; godinu,$ i tako dalje.

Posle uočavanja da povećanje novca prati određenu pravilnost, učenici ulaze u sledeću fazu modeliranja.

Faza matematičkog modela

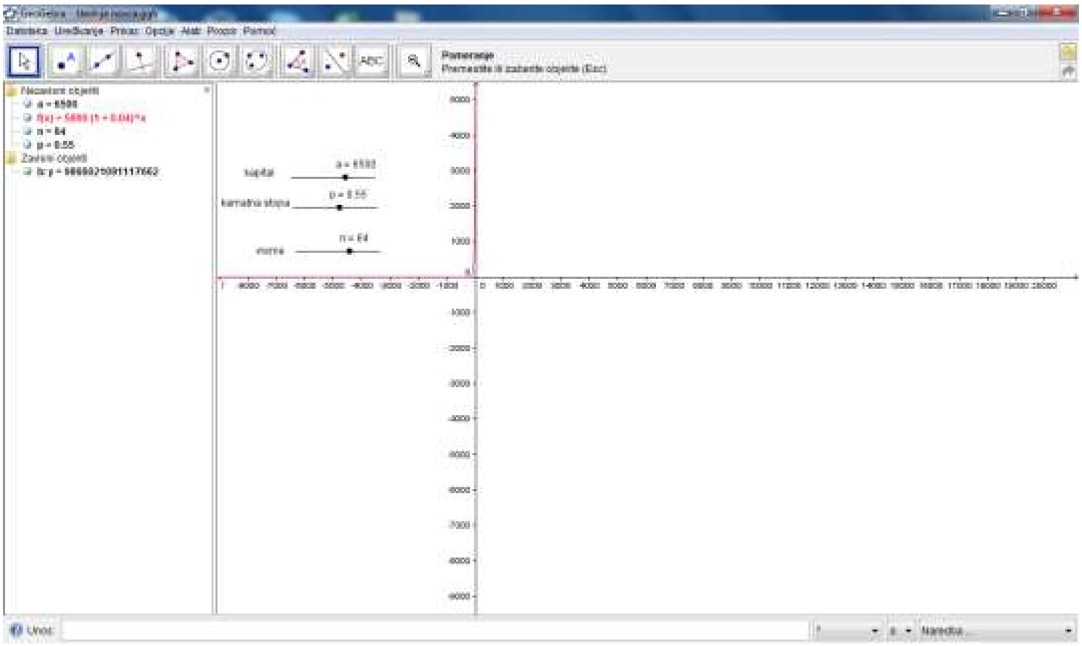
Učenici mogu da zaključe da vreme utiče na povećanje kapitala i da će se kapital posle n godina povećati na $5000 \cdot 1.04^n$. To se može opisati matematičkom formulom: $f(x) = 5000 \cdot 1.04^x$.

Prelaz iz treće u četvrtu fazu procesa modeliranja

U ovoj fazi, učenici mogu da koriste edukativni softver *GeoGebra* (Slika 9). Učenici pomoću opcije slajdera unose redom:

- a-vrednost za kapital (od 0 do10000, sa korakom 100),
- p-kamatna stopa (od 0 do 1, sa korakom 0.01)
- n-vreme na koje je uložen capital (od 0 do 100, sa korakom 0.1).

Vrednost $a*(1+p)^n$ predstavlja štednju.



Slika 9 *Modeliranje eksponencijalne funkcije u GeoGebra-i* (novac.ggb)

Faza matematičkog rešenja

U ovom delu procesa modeliranja učenici računaju, organizuju i beleže dobijene rezultate.

Prelazak iz četvrte u petu fazu procesa modeliranja

U ovom delu učenici treba da generalizuju svoje rezultate. Ako se količina novca predstavi matematičkom jednačinom i ako se nađe matematička formula, može se rešiti kompletan zadatak i problem vezani za investirani kapita. U ovoj tački modeliranja učenici bi trebalo da dođu do sledeća tri zaključka: Prvo, dobija se formula $K=5000\cdot 1.04^{n}$, gde *K* predstavlja kapital, a n predstavlja godine. Drugo, generiše se nova formula, $K=K_0\cdot 1.04^{n}$, gde je K_0 početni capital investiran na početku, i poslednje, treće, učenici zaključuju da važi sledeća formula $K=K_0\cdot(1+r)^{n}$, gde je $r=1+p$.

Primenjujući ovu formulu učenici jednostavno moglu da izračunaju porast kapitala u slučaju kamate 6% kao i kapital kada je se samo pola godine štedi. Rešenja su sledeća:

$K = K_0 \cdot 1.06^1 = 5000 \cdot 1.06 = 5300$, odakle sledi da je interes 300 dinara. Odgovor na postavljeno pitanje je da je bolje štedeti sa godišnjom kamatnom stopom od 6%. Interes je 1.5 puta veći nego interes kada se štedi kamatnom stopom od 4%.

$K = K_0 \cdot 1.04^{0.5} = 5000 \cdot 1.04^{0.5} = 5099$, štednja se posle pola godine uveća za 99 dinara.

Kada se kapitališe mesečno, kamatna stopa od 4% se deli na 12 delova, a vreme kapitalisanja je 12. To znači da se na taj način dobija $K = K_0 \cdot 1.0033^{12} = 5000 \cdot 1.0033^{12} = 5203.707$ dinara. To dovodi do zaključka da je bolje uložiti novac sa 4% kamate i mesečno kapitalisanje nego sa 4% i godišnje kapitalisanje. U prvom slučaju interes je 203.7 a u drugom 200 dinara.

Faza rešenja realnog problema

Kada se radi o vremenu potrebnom za udvostručenje kapitala, učenici treba da primene inverznu logaritamsku funkciju koja predstavlja broj godina. Ona glasi:

$$n=\frac{\log 2}{\log 1.04}$$

Prelaz iz pete u šestu fazu modeliranja

Ova faza predstavlja kada se testiraju dobre strane i slabosti modela. To znači da učenici treba da se osvrnu na to da li su korektno primenili ranije stečena znanja. Takođe, treba da se provere i početni uslovi.

Faza prihvatanja modela

Ovo je veoma važan deo procesa modeliranja jer učenici običnim jezikom treba da opišu svoje matematičke ideje.