12. Kétváltozós függvények

Értelmezés: a $z=f(x,y)$ képlet egy kétváltozós függvényt ad meg, ha a sík bármely (x,y) pontjához (x és y független változók) a z függő változó legfeljebb egy értéke tartozik. Ha egy sem, akkor a függvény nem értelmezett abban az (x,y) pontban, ha egy, akkor értelmezett. A kétváltozós függvény grafikonja egy felület a 3-dimenziós térben, értelmezési tartománya pedig egy kétdimenziós halmaz (pl. egy vagy több síkidom) az (x,y)-síkban (a felület vetülete a síkra).

Példa. Az origó középpontú egységsugarú gömb felülete az $x^2+y^2+z^2=1^2$ egyenlettel adható meg; ez nem egy függvény grafikonja, mert bizonyos (x,y) pontokhoz kétféle z is tartozik, ugyanis z-re megoldva két megoldás is létezhet: $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$. Ha csak a pozitív megoldást vesszük, az a felső egység-félgömb egyenletét adja, és az már függvényt definiál:

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya:

$$1-x^2-y^2\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2\leq 1^2\,,$$

vagyis az origó középpontú egységsugarú zárt körlemez az (x,y)-síkban (ezt úgy ábrázoljuk, hogy besatírozzuk).

Ábrázolás: síkmetszetek, szintvonalak. Mivel 3-dimenziós grafikont nem tudunk készíteni, a kétváltozós függvények részleges ábrázolásához 2-dimenziós síkmetszeteket használunk, ahol lerögzítjük az egyik változó értékét, és e mellett a maradék két változó összefüggése már ábrázolható a síkban. Ha pl. az x független változó értékét egy adott x_0 állandó értékre rögzítjük, az megfelel $z=f(x,y)$ felület és az x-tengelyre merőleges $x=x_0$ sík metszésének, a kapott $z=f(x_0,y)$ egyváltozós függvény (csak y-tól függ, mert x_0 állandó) ábrázolható az (y,z) síkon (a grafikonra odaírjuk, hogy $x=x_0$). Ha egy y-tengelyre merőleges $y=y_0$ síkkal metszünk, a szintén egyváltozós $z=f(x,y_0)$ függvényt kapjuk (ahol x a független változó), mely az (x,z) síkon ábrázolható.

Ha a z függő változó értékét rögzítjük egy adott z_0 állandó értékre, az a $z=f(x,y)$ felület és a függőleges z-tengelyre merőleges $z=z_0$ vízszintes sík metszésének felel meg, a kapott $z_0=f(x,y)$ egyenlet egy kétváltozós reláció, grafikonja az (x,y) síkon ábrázolható; ez nem kell, hogy függvény grafikonja legyen (bár lehet). A z függő változó rögzítésével nyert síkmetszeteket *szintvonalak*nak nevezzük, a grafikonra ráírjuk a szintvonal magasságát ($z=z_0$). *Megjegyzés:* a szintvonalak az (x,y) síkon mindig az értelmezési tartományon belül, vagy a határán haladnak!

Példa. ***a)*** *(x-síkmetszet)* Maradva a felső egységfélgömb-függvény példájánál, a függvény $x=x_0=0{,}6$ síkkal való metszése pl. a

$$z=f(0{,}6;y)=\sqrt{1-0{,}6^2-y^2}=\sqrt{0{,}8^2-y^2}$$

egyváltozós függvényt adja, amely egy origó középpontú, 0,8 sugarú felső félkör az (y,z) síkon.

b) *(z-síkmetszet=szintvonal)* A $z=z_0=0{,}8$ vízszintes síkmetszethez tartozó szintvonal egyenlete:

$$0{,}8 = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\ ,$$

melyet négyzetre emelve és átrendezve: $x^2+y^2=0{,}6^2$

adódik, ez pedig egy origó középpontú, 0,6 sugarú teljes körvonal lesz az (x,y) síkon (ez nem egy függvény grafikonja!). Hasonlóképpen könnyen belátható, hogy a $z=-1$, 0, 1, 2 értékekhez rendre a következő szintvonalak tartoznak: $z=-1$: üres halmaz, $z=0$: origó középpontú egységkör, $z=1$: origó (egyetlen pont, 0 sugarú „kör"), $z=2$: üres halmaz.

Parciális deriváltak, szélsőértékek

Parciális deriválás: pl. x szerint úgy deriválunk parciálisan, hogy az ismert (egyváltozós) deriválási szabályokat alkalmazzuk, de a többi független változót (pl. y-t) konstansként kezeljük a deriválási szabályok alkalmazása során. $z=f(x,y)$ (első) parciális derivált függvényeinek jelölései:

x szerinti: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,y)\big) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \big(f(x,y)\big)'_x = f'_x(x,y) = f'_x$

y szerinti: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(f(x,y)\big) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \big(f(x,y)\big)'_y = f'_y(x,y) = f'_y$.

Második parciális deriváltak. Mivel $f(x,y)$ első parciális deriváltjai maguk is kétváltozós függvények (még ha nem is függenek explicite valamelyik független változótól), ezért újból parciálisan differenciálva őket, kapjuk $f(x,y)$ második parciális derivált függvényeit:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Megjegyzés: ha a második deriváltak mind folytonosak, akkor a vegyes második parciális deriváltak (xy és yx indexűek) egyenlők, vagyis felcserélhető az x és y szerinti deriválás sorrendje.

Tétel (helyi szélsőérték szükséges feltétele). *Ha az $f(x,y)$ függvény parciálisan differenciálható az (x_0,y_0) pont egy környezetében és (x_0,y_0)-ban helyi szélsőértéke van, akkor szükségképpen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\,.$$

Vagyis az egyváltozós esethez hasonlóan a lehetséges szélsőértékeket úgy keressük, hogy a függvény deriváltjait nullával tesszük egyenlővé; de itt két egyenletünk és két ismeretlenünk van.

Tétel (helyi szélsőérték elégséges feltétele). *Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény kétszer parciálisan differenciálható az (x_0,y_0) pont egy környezetében, és összes második parciális deriváltja folytonos az (x_0,y_0) pontban.*

Ha $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *és* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ *teljesül a z* $(x,y)=(x_0,y_0)$ *pontban,*

akkor ott a függvénynek helyi szélsőértéke van, mégpedig $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ *esetén minimum,* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ *esetén maximum. Ha a második deriváltakra vonatkozó egyenlőtlenség fordítottja teljesül ('>0' helyett '<0'), akkor (x_0,y_0)-ban nincs szélsőérték.*

Példa. Maradjunk a felső egységfélgömb-függvény példájánál: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\tfrac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\tfrac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=0 \quad\Rightarrow\quad y=0,$$

vagyis $(x_0,y_0)=(0,0)$ az egyetlen lehetséges lokális szélsőérték-hely. A második deriváltak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{(-1)\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-(-x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2}=\frac{-(1-x^2-y^2)-x^2}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3}=\frac{-1+y^2}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3}\Rightarrow\ =-1,\text{ ha }(x,y)=(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{0\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-(-x)\cdot\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2}=\frac{-xy}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3}\Rightarrow\ =0,\text{ ha }(x,y)=(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(-1)\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}-(-y)\cdot\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2}=\frac{-(1-x^2-y^2)-y^2}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3}=\frac{-1+x^2}{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^3}\Rightarrow\ =-1,\text{ ha}$$

$(x,y)=(0,0)$

Az $(x_0,y_0)=(0,0)$ pontra teljesül a szélsőérték létezésére vonatkozó elegendő feltétel, mert $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=(-1)\cdot(-1)-(0)^2>0$, és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(-1)>0$ miatt ez maximumhely (a kupola csúcspontja).

1. FELADAT ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY ÉS SZINTVONALAK

Határozza meg és ***ábrázolja*** a kétváltozós függvény értelmezési tartományát és a $z_0=-1, 0, 1, 2$ magasságokhoz tartozó szintvonalakat!

a) $z=\sqrt{xy}$ ***b)*** $z=\log_2\frac{x}{y}$ ***c)*** $z=x+\sqrt{-y}$ ***d)*** $z=\frac{1}{y}-x$

e) $z=e^{x+y}$ ***f)*** $z=\sqrt[3]{y-x^3}$ ***g)*** $z=\sqrt{x^2-2x+y}$ ***h)*** $z=x\cdot 2^y$

i) $z=\frac{1}{x-y^2}$ ***j)*** $z=\cos(x\sqrt{y})$ ***k)*** $z=\log_2(y+2^x)$ ***l)*** $z=\log_2\frac{\sin x}{y}$

m) $z=2^{\log_2\sqrt[y]{x}}$ ***n*)*** $z=\log_x y$ ***o*)*** $z=\log_{\sqrt{x}}\sqrt[y]{x}$ ***p)*** $z=x+\sqrt[3]{-(x+y)^3}$

q*) $z=x+\sqrt[4]{-(x+y)^4}$ ***r*)*** $z=x^2+y^2-\sqrt{\cos(2\pi\sqrt{x^2+y^2})-1}$ ***s*)*** $z=2\sin\frac{\pi x^2}{2x^2+y^2}$

2. FELADAT PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

Adja meg a függvény első és második parciális derivált függvényeit!

a) $z=x\cdot y$ ***b)*** $z=\frac{x}{y}$ ***c)*** $z=x^2+\sqrt{y}$ ***d)*** $z=2xy+\cos x-\sin y$ ***e)*** $z=\frac{\sin x}{\cos y}$

f) $z=2^x+10^y$ ***g)*** $z=x^2-y^2+\ln\frac{x}{y}+\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}y$ ***h)*** $z=xe^{x+y}$ ***i)*** $z=x^y$ ***j)*** $z=\sqrt[x]{y}$

k) $z=\ln(y+e^x)$ ***l)*** $z=\sin xy$ ***m)*** $z=\operatorname{tg}(x+y)$ ***n)*** $z=(x-y)^9$

o) $z=\ln\frac{y}{\sin x}$ ***p)*** $z=\lg y$

3. FELADAT SZÉLSŐÉRTÉKEK

Keresse meg a függvény lehetséges szélsőérték-helyeit, és ha vannak, ellenőrizze a szélsőérték elégséges feltételét ill. számítsa ki a helyi szélsőértéket!

a) $z=e^x+e^{-y}$ ***b)*** $z=x^2+y^2$ ***c)*** $z=x^2-y^2$

d) $z=10x^2+14xy+5y^2+2x+2y+2006$ ***e)*** $z=2y(x-y)-x(x-1)$

f) $z=x^2+xy+y^2+x+y+1$ ***g)*** $z=(x+2y-1)(2x-y+1)$

h) $z=2x^2+3xy+y^2-x-2y+1$ ***i*)*** $z=x^4-4x^2y+5y^2-4y$

j) $z=\ln\frac{y}{\sin x}$ ***k)*** $z=\frac{\operatorname{ctg} x}{y^2+1}$ ***l)*** $z=\operatorname{tg}\frac{\ln x}{e^y}$ ***m)*** $z=\log_y x$

n) $z=\ln(x^2-x+1)+e^{y^2}$ ***o)*** $z=e^{x-x^2}+(y^2+1)^{-1}$

Megoldókulcs

1. feladat

a) ÉT={(x,y): (x>0 és y>0) vagy (x<0 és y<0) vagy x=0 vagy y=0} (1. és 3. síknegyed plusz a tengelyek); SzV: $z_0=-1$: üres, $z_0=0$: x=0 vagy y=0 (tengelyek), $z_0=1,2$: $y=z_0^2/x$ (hiperbolák) ***b)*** ÉT={(x,y): (x>0 és y>0) vagy (x<0 és y<0)} (1. és 3. síknegyed, tengelyek nélkül); SzV: $y=2^{-z_0}x=2x$, x, $x/2$, $x/4$ (egyenesek, az origó pontját kivéve) ***c)*** ÉT={(x,y): $y\le 0$} (alsó félsík plusz x-tengely); SzV: $y=-(x-z_0)^2$ (fordított parabolák) ***d)*** ÉT={(x,y): $y\ne 0$} (teljes sík mínusz x-tengely); SzV: $y=1/(x+z_0)$ (hiperbolák) ***e)*** ÉT=$\mathbb{R}^2$ (teljes sík); SzV: $y=\ln z_0-x$:: $z_0=-1,0$: üres, $z_0=1,2$: $y=-x$, $\ln 2-x$ (egyenesek) ***f)*** ÉT=$\mathbb{R}^2$; SzV: $y=x^3+z_0^{\,3}$ ***g)*** ÉT={(x,y): $y\ge-(x-1)^2+1$} (parabola plusz a fölötte lévő terület);
SzV: $z_0=-1$: üres, $z_0\ge 0$: $y=-(x-1)^2+1+z_0^{\,2}$ (parabolák) ***h)*** ÉT=$\mathbb{R}^2$; SzV: $z_0=-1$: $y=-\log_2(-x)$, $z_0=0$: $x=0$, $z_0=1$: $y=-\log_2 x$, $z_0=2$: $y=1-\log_2 x$ ***i)*** ÉT={(x,y): $x\ne y^2$} ($\mathbb{R}^2$, kivéve az $x=y^2$ parabolát); SzV: $y=\pm\sqrt{x+1}$, üres, $\pm\sqrt{x-1}$, $\pm\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ (fektetett parabolák) ***j)*** ÉT={(x,y): $y\ge 0$} (felső félsík plusz x-tengely); SzV: $y=\frac{((2k+1)\pi)^2}{x^2}$, $\frac{((k+\frac{1}{2})\pi)^2}{x^2}$, $\frac{(2k\pi)^2}{x^2}$, üres ***k)*** ÉT={(x,y): $y>-2^x$} (-2^x görbéje fölötti terület, a görbe nélkül); SzV: $y=-2^x+2^{z_0}$ ***l)*** ÉT={(x,y): $y\sin x>0$} = {(x,y): $x\ne k\pi$, $0+2k\pi<x<\pi+2k\pi \Rightarrow y>0$, $\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi) \Rightarrow y<0$, $k\in\mathbb{Z}$}; SzV: $y=2^{-z_0}\sin x$, kivéve az x-tengellyel való metszéspontokat ***m)*** ÉT={(x,y): x>0, $y\ne 0$} (jobb félsík, kivéve a tengelyeket); SzV: $z_0=-1,0,1$: üres, $z_0=2$: $y=\log_2 x$, $x\ne 1$ ***n)*** $z=\log_x y=\frac{\ln y}{\ln x}$, ÉT={($x$,$y$): y>0, x>0, $x\ne 1$} (1. síknegyed, a tengelyeket és az x=1 egyenest kivéve); SzV: $y=x^{z_0}$ (x>0, $x\ne 1$)
o) $z=\log_{\sqrt{x}}\sqrt[y]{x}=\frac{2}{y}$, ha ($x$,$y$) $\in$ ÉT={(x,y): x>0, $x\ne 1$, $y\ne 0$} (jobb félsík, a tengelyeket és az x=1 egyenest kivéve); SzV: $y=2/z_0=-2$, üres, 2, 1 (x>0: vízszintes félegyenesek, az x=1 pontot kivéve)

p) $z=-y$, ÉT=$\mathbb{R}^2$; SzV: $y=-z_0$ (vízszintes egyenesek) ***q)*** $z=x=-y$, ha $(x,y)\in$ ÉT=$\{(x,y): y=-x\}$ (csak egy egyenesen értelmezett, így a grafikonja nem valódi felület, csak egy térgörbe, a szintvonalak pedig csak pontok); SzV: pontok: (-1,1), (0,0), (1,–1), (2,–2) ***r)*** $z=x^2+y^2$, ha $(x,y)\in$ ÉT=$\{(x,y): x^2+y^2=k^2, k\in\mathbb{Z}\}$ (origó középpontú, egész szám sugarú koncentrikus körvonalak, a grafikon nem valódi felület); SzV: $z_0=-1$: üres, $z_0=0$: (0,0) pont, $z_0=1$: $x^2+y^2=1^2$ (egységkör), $z_0=2$: üres ***s)*** ÉT==$\{(x,y): (x,y)\neq(0,0)\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (teljes sík, kivéve az origót); SzV: $z_0=-1$: üres, $z_0=0$: $x=0, y\neq 0$, $z_0=1$: $y=\pm 2x, x\neq 0$, $z_0=2$: $y=0, x\neq 0$

▪ 2. feladat

a) $\frac{\partial z}{\partial x}=y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

b) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$

c) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-1}{4\sqrt{y^3}}$

d) $\frac{\partial z}{\partial x}=2y-\sin x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2x-\cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin y$

e) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos x}{\cos y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-\sin x}{\cos y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\cos x\sin y}{\cos^2 y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sin x(\cos^2 y+2\sin^2 y)}{\cos^3 y}$

f) $\frac{\partial z}{\partial x}=2^x\ln 2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=10^x\ln 10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2^x\ln^2 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10^x\ln^2 10$

g) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y-\frac{1}{y}+\frac{1}{\sin^2 y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2-\frac{1}{x^2}+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2+\frac{1}{y^2}-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

h) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}(x+1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{x+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+y}(x+2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x+y}(x+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^{x+y}$

i) $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$

j) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\sqrt[x]{y}\ln y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt[x]{y}}{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\sqrt[x]{y}\ln y(2x+\ln y)}{x^4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-\sqrt[x]{y}(x+\ln y)}{x^3 y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sqrt[x]{y}(1-x)}{x^2y^2}$

k) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{y+e^x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y+e^x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^x y}{(y+e^x)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-e^x}{(y+e^x)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-1}{(y+e^x)^2}$

l) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2\sin xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos xy-xy\sin xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x^2\sin xy$

m) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos^2(x+y)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\,\mathrm{tg}(x+y)}{\cos^2(x+y)}$

n) $\frac{\partial z}{\partial x}=9(x-y)^8$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-9(x-y)^8$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=72(x-y)^7$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-72(x-y)^7$

o) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{ctg}\,x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$

p) $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y\ln 10}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2\ln 10}$

3. feladat

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \neq 0 \Rightarrow$ nincs krit.hely

b) min.hely: (0,0), min.értéke: $z=0$
c) krit.hely: (0,0), nem SzÉ-hely

d) min.hely: $(2,-3)$, min.értéke: $z=2005$
e) max.hely: $(1, \frac{1}{2})$, max.értéke: $z=\frac{1}{2}$

f) min.hely: $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$, min.értéke: $z=\frac{2}{3}$
g) krit.hely: $(-0{,}2; 0{,}6)$, nem SzÉ-hely

h) krit.hely: $(4,-5)$, nem SzÉ-hely
i) krit.h.: $(0; 0{,}4)$, nem SzÉ-hely; min.helyek: $(\pm 2, 2)$, min.ért.: $z=-4$
j) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \neq 0 \Rightarrow$ nincs krit.hely

k) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{(y^2+1)\sin^2 x} \neq 0 \Rightarrow$ nincs krit.hely
l) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(e^{-y}\ln x)\, e^y x} \neq 0 \Rightarrow$ nincs krit.hely

m) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x \ln y} \neq 0 \Rightarrow$ nincs krit.hely
n) min.hely: $(\frac{1}{2}, 0)$, min.értéke: $z=\ln\frac{3\cdot e}{4}$ ***o)*** max.hely: $(\frac{1}{2}, 0)$, max.értéke: $z=\sqrt[4]{e}+1$