11. Határozott integrál

Kiszámítása, Newton-Leibniz-szabály:

Ha $[a,b]$-n $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, **akkor** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

- **Példa:**

$$\int_0^1 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \left[(x^2-1)\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \left((1^2-1)\ln 2 - \tfrac{1}{2} + 1\right) - \left((0^2-1)\ln 1 + 0\right) = \tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{2}$$

Geometriai jelentése

az $[a,b]$ intervallumon az $f(x)$ függvény görbéje és az x-tengely közti előjeles terület. Ez azt jelenti, hogy ha $f(x)$ előjelet vált (a,b)-n, akkor a negatív és pozítív előjelű részek kiejtik egymást és a határozott integrál lényegében a pozitív és negatív előjelű területrészek különbségét adja. Másrészt, ha $f(x)$ nem vált előjelet (a,b)-n, akkor a határozott integrál abszolút értéke az abszolút (nem előjeles) területet adja meg.

Két görbe által közrezárt abszolút terület meghatározása.

Ha a folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvények görbéi kettő vagy több helyen metszik egymást, akkor egy vagy több véges zárt területrészt fognak közre. A metszéspontok az $f(x)=g(x)$ egyenlet megoldásai, azaz az $f(x)-g(x)$ különbségfüggvény zérushelyei; jelölje ezeket x_1, x_2, x_3,… Mivel a zérushelyek közti szakaszokon $f(x)-g(x)$ már nem vált előjelet, így a két görbe által közrezárt abszolút terület:

$$T = \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right| + \ldots$$

- **Példa:**

Határozzuk meg az $f(x)=x^3$ és $g(x)=x$ függvények görbéi által közrezárt abszolút területet! Metszéspontok meghatározása:

$f(x)-g(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = (x+1)x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$, így:

$$T = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right| = \left|\left(\tfrac{0^4}{4} - \tfrac{0^2}{2}\right) - \left(\tfrac{(-1)^4}{4} - \tfrac{(-1)^2}{2}\right)\right| + \left|\left(\tfrac{1^4}{4} - \tfrac{1^2}{2}\right) - \left(\tfrac{0^4}{4} - \tfrac{0^2}{2}\right)\right| = \left|\tfrac{1}{4}\right| + \left|-\tfrac{1}{4}\right| = \tfrac{1}{2}.$$

Forgástest térfogata:

az $[a,b]$ intervallumon az $f(x)$ függvény görbéje és az x-tengely közti területnek az x-tengely körüli elforgatásával nyert forgástest térfogata: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

Példa:

az origó körüli r (=adott állandó) sugarú felső félkör képlete: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, ÉT=$[-r, r]$; ezen az intervallumon az x-tengely körüli elforgatással nyert r sugarú gömb térfogata:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \pi\Big((r^2 r - \tfrac{1}{3}r^3) - (r^2(-r) - \tfrac{1}{3}(-r)^3)\Big) = \tfrac{4}{3}r^3\pi$$

,
vagyis megkaptuk a gömb térfogatképletét.

Az $f(x)$ függvény integrálközepe az $[a,b]$ intervallumon:

$$\overline{f}_{[a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{\left[F(x)\right]_a^b}{b-a} = \frac{F(b) - F(a)}{b-a},$$

ez egy átlagos függvényérték, annak a téglalapnak a magassága, melynek (előjeles) területe egyenlő az $f(x)$ függvény görbéje és az x-tengely közötti (előjeles) területtel az $[a,b]$ intervallumon.

Példa.

Ha $M(t)$ egy időtől függő mennyiség (pl. út, hőmérséklet, oldott anyag tömege, stb.) és $v(t)=M'(t)$ ennek változási sebessége, akkor $v(t)$ integrálközepe adja meg az $M(t)$ mennyiségnek egy $[t_0,t_1]$ időintervallumra vonatkoztatott átlagos változási sebességét. Pl. ha $M(t)=s(t)$ útfüggvény, akkor az átlagsebesség a $[t_0,t_1]$ időintervallumon:

$$\overline{v}_{[t_0,t_1]} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t}{t_1 - t_0} = \frac{\left[s(t)\right]_{t_0}^{t_1}}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0},$$ azaz a megtett út osztva az eltelt idővel.

1. FELADAT HATÁROZOTT INTEGRÁL KISZÁMÍTÁSA

a) $\int_{-1}^{-e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ***b)*** $\int_{1}^{256} \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}{x}\,\mathrm{d}x$ ***c)*** $\int_{0}^{4} (\sqrt{x} - 2x + 3x^2 - 6x^{\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}x$ ***d)*** $\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 2e^{2x} + 3e^{3x}}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x$ ***f)*** $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\pi}{\sin^2 \pi x}\,\mathrm{d}x$ ***g)*** $\int_{0}^{\pi} (\tfrac{1}{2}\sin x + \cos\tfrac{x}{2})\,\mathrm{d}x$ ***h)*** $\int_{0}^{\pi/4} \frac{3 - 4\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

i) $\int_{-1/2}^{1/2} \cos^2 \pi x\,\mathrm{d}x$ ***j)*** $\int_{1}^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ***k)*** $\int_{0}^{\pi/2} (\sin x + 1)^3 \cos x\,\mathrm{d}x$ ***l)*** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{e^{\mathrm{tg}\,x}\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

m) $\int_{1}^{e} x\ln x\,\mathrm{d}x$ ***n)*** $\int_{0}^{1} xe^x\,\mathrm{d}x$ ***o)*** $\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ ***p)*** $\int_{\pi}^{0} x\cos x\,\mathrm{d}x$

2. FELADAT TERÜLETSZÁMÍTÁS

Számítsa ki a két görbe által közrezárt véges terület nagyságát! ***a)--g):*** készítsen ábrát is!

a) $\sin \pi x$ és $2x$ ***b)*** $x+1$ és 2^x ***c)*** $\sqrt{x}$ és x^2 ***d)*** $4-x^2$ és $(x-2)^2$

e) $3-x$ és $2/x$ ***f)*** $\sqrt[3]{x}$ és x^3 ***g)*** x^3-1 és $3x^2-2x-1$

h) x^3+2x^2-2x és x^3-2x^2+2x

3. FELADAT FORGÁSTEST TÉRFOGATA

Számítsa ki az $[a,b]$ intervallumon az $f(x)$ függvény görbéje és az x-tengely közti terület x-tengely körüli elforgatásával nyert térfogatot. Ábrázolja a forgástest síkmetszetét!

a) $[a,b]=[0,1]$ és $f(x)=\sqrt{x}$ ***b)*** $[a,b]=[0,2\pi]$ és $f(x)=1+\frac{1}{2}\sin x$

c) $[a,b]=[\frac{1}{e},e]$ és $f(x)=\ln x$ ***d)*** $[a,b]=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ és $f(x)=(\cos\frac{1}{2}x)^{-1}$

e) $[a,b]=[0,h]$ és $f(x)=\frac{r}{h}x$ (kúp) ***f)*** $[a,b]=[0,h]$ és $f(x)=r\sqrt{\frac{x}{h}}$ (paraboloid)

4. FELADAT

Számítsa ki az $[a,b]$ intervallumon az $f(x)$ és $g(x)$ függvények görbéi közötti terület x-tengely körüli elforgatásával nyert térfogatot. Ábrázolja a forgástest síkmetszetét!

a) $[a,b]=[0,2]$, $f(x)=\sqrt{x}+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ ***b)*** $[a,b]=[0,\pi]$, $f(x)=2\sin x$, $g(x)=\sin x$

c*) $[a,b]=[-r,r]$, $f(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}$, $g(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}$, $R\geq r$ (tórusz–gyűrű)

5. FELADAT INTEGRÁLKÖZÉP, KEZDETI FELTÉTELEK

Legyen az $M(t)$ időtől függő mennyiség változási sebessége $v(t)=M'(t)$. Határozza meg $M(t)$ képletét a megadott kezdeti feltétel mellett, és számítsa ki az átlagos változási sebességét a $[t_0,t_1]$ időintervallumon! Továbbá, számítsa ki $M(t)$ átlagos értékét is $[t_0,t_1]$-en!

a) $v(t)=\sin\frac{\pi}{12}t$, $M(6)=24$, $[t_0,t_1]=[0,24]$ ***b)*** $v(t)=\mathrm{tg}^2 t$, $M(0)=2$, $[t_0,t_1]=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

c) $v(t)=\frac{1}{t}$, $M(1)=1$, $[t_0,t_1]=[1,e]$ ***d)*** $v(t)=te^t$, $M(0)=1$, $[t_0,t_1]=[1,\ln 9]$

6. FELADAT

Jelölje a t időpillanatban egy mozgó test helyzetét (távolságát) $s(t)$, sebességét $v(t)$ és gyorsulását $a(t)$. Határozza meg $v(t)$ és $s(t)$ képletét a megadott kezdeti feltételek mellett, és számítsa ki az átlagos gyorsulást, az átlagsebességet, és a megtett utat a $[t_0,t_1]$ időintervallumon!

a) $a(t)=2-e^{-t}$, $v(0)=0$, $s(0)=1$, $[t_0,t_1]=[0,2]$

b) $a(t)=t^{-\frac{3}{2}}$, $v(1)=0$, $s(4)=4$, $[t_0,t_1]=[1,9]$

c) $a(t)=t\cos t$, $v(\pi)=0$, $s(0)=0$, $[t_0,t_1]=[0,\pi]$

d) $a(t)=e^t(e^t+1)^{-2}$, $v(0)=\frac{1}{2}$, $s(0)=0$, $[t_0,t_1]=[0,1]$

Megoldókulcs

Határozott integrál kiszámítása

a) 1 ***b)*** 8 ***c)*** $-\frac{352}{15}=-23\frac{7}{15}=-23{,}46\dot{6}\ldots$ ***d)*** $4(e-\frac{1}{e}-1)$ ***e)*** $1-\frac{\pi}{4}$ ***f)*** 1 ***g)*** 3

h) $3-2\sqrt{2}$ ***i)*** $\frac{1}{2}$ ***j)*** 2 ***k)*** $3{,}75$ ***l)*** $e-\frac{1}{e}$ ***m)*** $\frac{e^2+1}{4}$ ***n)*** 1 ***o)*** π ***p)*** 2

Területszámítás

a) $T_{[-\frac{1}{2},0]}+T_{[0,\frac{1}{2}]}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$ ***b)*** $T_{[0,1]}=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}=\frac{\ln(8/e^2)}{\ln 4}$ ***c)*** $T_{[0,1]}=\frac{1}{3}$ ***d)*** $T_{[0,2]}=\frac{8}{3}$

e) $T_{[1,2]}=\frac{3}{2}-2\ln 2$ ***f)*** $T_{[-1,0]}+T_{[0,1]}=1$ ***g)*** $T_{[0,1]}+T_{[1,2]}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ ***h)*** $T_{[0,1]}=\frac{2}{3}$

Forgástest térfogata

a) $\frac{\pi}{2}$ ***b)*** $(\frac{3}{2}\pi)^2=2{,}25\pi^2$ ***c)*** $\frac{e^2-5}{e}\pi$ ***d)*** 4π ***e)*** $\frac{h}{3}r^2\pi$ ***f)*** $\frac{h}{2}r^2\pi$

a) $\frac{44}{3}\pi$ ***b)*** $\frac{3}{2}\pi^2$ ***c)*** $(2R\pi)(r^2\pi)=2Rr^2\pi^2$

Integrálközép, kezdeti feltételek

a) $M(t)=24-\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi}{12}t,\ \bar{v}_{[0,24]}=0,\ \overline{M}_{[0,24]}=24$ ***b)***
$M(t)=\mathrm{tg}\,t-t+2,\ \bar{v}_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]}=\frac{4}{\pi}-1,\ \overline{M}_{[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]}=2$

c) $M(t)=\ln|t|+1,\ \bar{v}_{[1,e]}=\frac{1}{e-1},\ \overline{M}_{[1,e]}=\frac{e}{e-1}$ ***d)***
$M(t)=e^t(t-1)+2,\ \bar{v}_{[1,\ln 9]}=9,\ \overline{M}_{[1,\ln 9]}=11-\frac{9-e}{\ln 9-\ln e}$

a) $v(t)=2t-1+e^{-t},\ \bar{a}_{[0,2]}=\frac{3+e^{-2}}{2},\ s(t)=t^2-t+2-e^{-t},\ \bar{v}_{[0,2]}=\frac{3-e^{-2}}{2},\ s(2)-s(0)=3-e^{-2}$

b) $v(t)=2-\frac{2}{\sqrt{t}},\ \bar{a}_{[1,9]}=\frac{1}{6},\ s(t)=2t-4\sqrt{t}+4,\ \bar{v}_{[1,9]}=1,\ s(9)-s(1)=8$

c) $v(t)=t\sin t+1+\cos t,\ \bar{a}_{[0,\pi]}=-\frac{2}{\pi},\ s(t)=t(1-\cos t)+2\sin t,\ \bar{v}_{[0,\pi]}=2,\ s(\pi)-s(0)=2\pi$

d) $v(t)=\frac{e^t}{e^t+1},\ \bar{a}_{[0,1]}=\frac{e-1}{2(e+1)},\ s(t)=\ln\frac{e^t+1}{2},\ \bar{v}_{[0,1]}=s(1)-s(0)=\ln\frac{e+1}{2}$