10. Határozatlan integrál

Definíciók, alapszabályok

Ha $F'(x)=f(x)$, azaz $f(x)$ a $F(x)$ függvény derivált (származék) függvénye, akkor a $F(x)$ függvényt $f(x)$ primitív (ős) függvényének nevezzük. $F(x)$ mellett bármely $(F(x)+C)$ függvény is primitív függvénye $f(x)$-nek, ahol C tetszőleges valós állandó, mivel $(C)'=0$. Az $f(x)$ függvény határozatlan integrálja alatt $f(x)$ primitív függvényeinek összességét értjük, jelölésben:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x)=f(x)$$

ahol $F(x)$ egy a végtelen sok primitív függvény közül, C pedig a határozatlan integrációs állandó.

A határozatlan integrálás szabályai

a deriválási szabályokból nyerhetők, a legalapvetőbbek a következők:

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (c \text{ állandó}),$$

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots)\,\mathrm{d}x = c_1\int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2\int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots$$

A független változó lineáris transzformációjára vonatkozó szabály[1]:

ha $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$, akkor $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{F(ax+b)}{a}+C$

gyakori speciális esetek: $\int f(x+b)\,\mathrm{d}x = F(x+b)+C$ és $\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \dfrac{F(ax)}{a}+C$

(ha a=1 ill. b=0).

Alapintegrálok*

Hatvány- és exponenciális függvények	Trigonometrikus függvények
$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

[1] Ezt a szabályt nem mindenki tekinti alapintegrálási szabálynak, mivel lényegében a helyettesítéses integrálás speciális esete.

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C \quad (\alpha=-1 \text{ eset})$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0,\ a\neq 1)$	$\int (\mathrm{ctg}^2 x + 1)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C \quad (a=e \text{ eset})$	$\int (\mathrm{tg}^2 x + 1)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + C$

* α és a valós állandók, e=2,71828…

▪ **Példa**

$$\int\left(3x^5 - x + \sqrt[3]{2x} + 2 - \frac{4}{x} + 2^x - 6e^{-x} + 5\sin 2x - 8\cos(x-\tfrac{\pi}{5}) - \frac{7}{\sin^2 x} + \frac{9}{\cos^2 2x}\right)dx =$$

$$= 3\frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2} + \sqrt[3]{2}\,\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 2x - 4\ln\lvert x\rvert + \frac{2^x}{\ln 2} - 6\frac{e^{-x}}{-1} + 5\frac{-\cos 2x}{2} - 8\sin(x-\tfrac{\pi}{5}) - 7(-\mathrm{ctg}\,x) + 9\frac{\mathrm{tg}2x}{2} + C$$

Helyettesítéses integrálás módszere

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Ezt a módszert olyan szorzatra alkalmazzuk, ahol egy összetett függvény van összeszorozva belső függvényének deriváltjával. Itt két dolgot is helyettesítünk: a belső függvényt egy u segédváltozóval, és a belső függvény du/dx = g′(x) deriváltjával szorzott dx differenciált, tehát:

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)\,dx\,.$$

A helyettesítéssel kapott újabb integrálási probléma remélhetőleg egyszerűbb az eredetinél, és ha sikerül megtalálni f (u) primitív függvényét, F(u)-t, akkor u helyébe a g(x) belső függvényt visszahelyettesítve, kapjuk az eredeti probléma megoldását.

▪ **Példa**

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx = \int (-\tfrac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2x)\,dx = \int (-\tfrac{1}{2})\,u^{-\frac{1}{3}}du = -\tfrac{1}{2}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\tfrac{3}{4}(1-x^2)^{\frac{2}{3}} + C$$

ahol apró átalakítás után az $u=1-x^2$, $du=-2x\,dx$ helyettesítést alkalmaztuk.

Parciális integrálás módszere:

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Ezt a módszert olyan szorzatra alkalmazzuk, ahol az egyik tényezőnek, $f'(x)$-nek, ismerjük a primitív függvényét, $f(x)$-et, a másik, $g(x)$ tényező deriváltja pedig egyszerűbbé teszi a szabály jobboldalán szereplő új integrálási problémát a baloldali eredetinél. A módszer nem mindig alkalmazható eredményesen; tipikus függvénytípusok, amelyekre működik: $x^\alpha \log_a x$, xa^x, $xe^{\alpha x}$, $x\sin\alpha x$, $x\cos\alpha x$, stb.

- **Példa**

$$\int 2x\ln(x+1)\,dx = (x^2-1)\ln(x+1) - \int (x^2-1)\frac{1}{x+1}\,dx = (x^2-1)\ln(x+1) - \int (x-1)\,dx = (x^2-1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + x + C$$

ahol $f'(x) = 2x$-hez nem x^2-et, hanem az $f(x) = x^2-1$ primitív függvényt választottuk, amely jelen esetben egyszerűsítést tett lehetővé.

- **Példa: kétlépéses**

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}x^2 - \int (-e^{-x})\cdot 2x\,dx = -e^{-x}x^2 + \int e^{-x}\cdot 2x\,dx =$$

$$= -e^{-x}x^2 - e^{-x}\cdot 2x - \int (-e^{-x})\cdot 2\,dx = -e^{-x}x^2 - e^{-x}\cdot 2x - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C$$

ahol mindkét parciális integrálási lépésben $f'(x)=e^{-x}$ választással éltünk.

- **Példa: kétlépéses implicit**

pl. $e^x \sin x$, $e^x \cos x$ (lásd jegyzet, 87.old., 5.5.Példa)

Racionális törtfüggvények: résztörtekre bontás módszere

Itt azonos átalakítással pl. olyan racionális törtet vezethetünk vissza alapintegrálra, ahol a számláló konstans vagy elsőfokú, a nevező pedig másodfokú két valós gyökkel. A résztörtek nevezői a gyöktényezők lesznek, számlálói konstansok (A, B), ezeket keressük határozatlan együtthatóként. Ehhez közös nevezőre hozzuk a határozatlan együtthatójú résztörteket, majd x hatványai szerint összevonást végzünk a számlálóban.

- **Példa:**

$$\frac{-2x+3}{x^2-2x-3} = \frac{-2x+3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-3B}{(x-3)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

ahol az egyenlőség miatt az $A+B=-2$, $A-3B=3$ egyenletrendszert kapjuk, melyből $A=-3/4$, $B=-5/4$, tehát $\displaystyle\int \frac{-2x+3}{x^2-2x-3}\,dx = \int\left(\frac{-\frac{3}{4}}{x-3} + \frac{-\frac{5}{4}}{x+1}\right)dx = -\tfrac{3}{4}\ln|x-3| - \tfrac{5}{4}\ln|x+1| + C$.

Feladatok

1. FELADAT ALAPINTEGRÁLOK

Integrálja a függvényt alapintegrálással. Ha szükséges, először alakítsa át azonosságok / egyszerűsítések segítségével alapintegrálok lineáris kombinációjává!

a) $2x^2-9x+12$ ***b)*** $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}}{x}$ ***c)*** $\dfrac{\pi-3x+2x^2-x^3}{x^2}$ ***d)*** $\dfrac{\sqrt{2x}-3x+e^2-x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$ ***e)*** $(x^2-2^x)(x^2+2^x)$

f) $\dfrac{3-4\sin^3 x}{\sin^2 x}$ ***g)*** $\cos\frac{x}{2}-\dfrac{1}{x-1}$ ***h)*** $\dfrac{\pi-3e^x+e^{3x}-3^x}{e^{2x}}$ ***i)*** $\dfrac{3}{2x-1}-5e^{-2x+1}$ ***j)***

$\frac{-2}{(x-1)^2}+(x+10)^9$

k) $2005^{-x}+x^{-2005}$ ***l)*** $\operatorname{tg}^2 x$ ***m)*** $\frac{\sin(x-2006)}{2005}$ ***n)*** $\frac{\cos^2(\pi x)-e^{x+\pi}}{e^x\cos^2(\pi x)}$ ***o)*** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

p) $x(x+1)^8$ ***q)*** $\frac{1}{\sin^2 2x}$ ***r)*** $\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$ ***s)*** $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$ ***t)*** $\frac{x^3+1}{x+1}$

2. FELADAT HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS

Integrálja a függvényt a helyettesítés módszerével. (Némi átalakítás szükséges lehet!)

a1) $\operatorname{tg} x$ ***a2)*** $\operatorname{ctg} x$ ***b)*** $x\sin x^2$ ***c)*** $x^2e^{-x^3}$ ***d)*** $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}$ ***e)*** $\frac{(\sqrt[3]{x}+1)^{2005}}{\sqrt[3]{x^2}}$

f) $\frac{\ln x}{x}$ ***g)*** $\frac{1}{x\ln x}$ ***h)*** $\frac{\sin(\ln x)}{x}$ ***i)*** $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ ***j)*** $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x-2}}{\sin^2 x}$ ***k)*** $\frac{1}{e^{\operatorname{tg} x}\cos^2 x}$

l) $\frac{x^2+1}{3-6x-2x^3}$ ***m)*** $x\cdot\sqrt{x^2+1}$ ***n)*** $e^x\sin e^x$ ***o)*** $\frac{e^{2\ln|x|}}{x}$ ***p)*** $\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\cos^2(\pi x)}$ ***q)*** $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

r) $\frac{x+\sin 2x}{x^2-\cos 2x}$ ***s)*** $\frac{x}{\sin^2(x^2+1)}$ ***t)*** $\frac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$ ***u)*** $\frac{2\sin x}{2-\cos x}$ ***v)*** $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x$ ***w)*** $\frac{3\cdot\sqrt{x}}{2(\sqrt{x^3}-1)^2}$

x) $(4x-2x^3)\sqrt[3]{x^2-2}$ ***y1)*** $\sin^2 x$ ***y2)*** $\cos^2 x$ ***z1)*** $\sin^3 x$ ***z2)*** $\cos^3 x$

3. FELADAT PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

a) $\lg x$ ***b)*** $x^{2005}\log_2 x$ ***c)*** $\sqrt{x}\ln x$ ***d)*** $\frac{\ln x}{x}$ ***e)*** $x\cdot 2^x$

f) $(2x-1)e^{-2x}$ ***g)*** $\frac{\ln(\sin^2 x)}{\cos^2 x}$ ***h)*** $x\sin\frac{x}{2}$ ***i)*** $(x+1)\cos 2x$

j) $\sin^2 x$ ***k)*** $\cos^2\frac{x}{2}$ ***l)*** $\ln^2 x$ ***m)*** $(x^{-1}\ln x)^2$ ***n)*** $x^2\cos 2x$

o) $x^2 2^x$ ***p)*** $(x^2+2)\sin x$ ***q)*** $e^{-x}\sin x$ ***r)*** $2^x\cos x$ ***s)*** $4x\cos^2 x$

t) $\frac{\ln(\ln x)}{x}$ ***u)*** $\cos(\ln x)$

4. FELADAT RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA RÉSZTÖRTEKRE BONTÁSSAL

a) $\frac{x}{x^2-1}$ ***b)*** $\frac{1}{x^2+x}$ ***c)*** $\frac{3x-2}{x^2-3x+2}$ ***d)*** $\frac{3x-3}{2x^2-5x+2}$ ***e)*** $\frac{x+2}{(x-1)^2}$

5. FELADAT MÓDSZEREK KOMBINÁCIÓJA

a) $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ ***b1)*** $\frac{1}{\sin x}$ ***b2)*** $\frac{1}{\cos x}$ ***c)*** $\frac{e^x}{e^{2x}-1}$ ***d)*** $\frac{x}{\cos^2 x}$ ***e)*** $x^3e^{x^2}$

f) $x^5 \sin x^3$ ***g)*** $e^{\sqrt{x}}$ ***h)*** $\cos\sqrt{x}$

Megoldókulcs

Alapintegrálás

a) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 12x + C$ ***b)*** $24 \cdot \sqrt[24]{x} + C$ ***c)*** $-\frac{\pi}{x} - 3\ln|x| + 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$

d) $\sqrt{2}x - 2x^{\frac{3}{2}} + 2e^2 x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C$ ***e)*** $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{\ln 4}4^x + C$ ***f)*** $-3\operatorname{ctg} x + 4\cos x + C$

g) $2\sin\frac{x}{2} - \ln|x-1| + C$ ***h)*** $-\frac{\pi}{2}e^{-2x} + 3e^{-x} + e^x + \frac{1}{2-\ln 3}\left(\frac{3}{e^2}\right)^x + C$ ***i)*** $\frac{3}{2}\ln|2x-1| + \frac{5}{2}e^{-2x+1} + C$

j) $2(x-1)^{-1} + 0{,}1(x+10)^{10} + C$ ***k)*** $-\frac{1}{\ln 2005}2005^{-x} - \frac{1}{2004}x^{-2004} + C$

l) $\operatorname{tg} x - x + C$ ***m)*** $-\frac{1}{2005}\cos(x-2006) + C$ ***n)*** $-e^{-x} - \frac{e^{\pi}}{\pi}\operatorname{tg}(\pi x) + C$ ***o)*** $\frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}) + C$

p) $\frac{1}{10}(x+1)^{10} - \frac{1}{9}(x+1)^9 + C$ ***q)*** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + C$ ***r)*** $\sin x + \cos x + C$

s) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \ln|x| + C$ ***t)*** $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

Helyettesítéses integrálás

a1) $-\ln|\cos x| + C$ ***a2)*** $\ln|\sin x| + C$ ***b)*** $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$ ***c)*** $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$ ***d)*** $\frac{3}{2}(\sqrt{x}+1)^{\frac{4}{3}} + C$

e) $\frac{3}{2006}(\sqrt[3]{x}+1)^{2006} + C$ ***f)*** $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$ ***g)*** $\ln|\ln x| + C$ ***h)*** $-\cos(\ln x) + C$ ***i)*** $-(\sin x)^{-1} + C$

j) $-\frac{2}{3}(\operatorname{ctg} x - 2)^{\frac{3}{2}} + C$ ***k)*** $-e^{-\operatorname{tg} x} + C$ ***l)*** $-\frac{1}{6}\ln\left|3 - 6x - 2x^3\right| + C$ ***m)*** $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

n) $-\cos e^x + C$ ***o)*** $\frac{1}{2}e^{2\ln|x|} + C = \frac{1}{2}x^2 + C$ ***p)*** $\frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}^2 \pi x + C$ ***q)*** $\ln|\sin x + \cos x| + C$

r) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - \cos 2x\right| + C$ ***s)*** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1) + C$ ***t)*** $\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x + \sqrt{2}) + C$

u) $2\ln(2 - \cos x) + C$ ***v)*** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$ ***w)*** $-(x^{\frac{3}{2}} - 1)^{-1} + C$ ***x)*** $-\frac{3}{7}(x^2 - 2)^{\frac{7}{3}} + C$

y1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ ***y2)*** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ ***z1)*** $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

z2) $-\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x + C$

Parciális integrálás

a) $x\left(\lg x - \frac{1}{\ln 10}\right) + C = x\lg(x/e) + C$ ***b)*** $\frac{1}{2006}x^{2006}\left(\log_2 x - \frac{1}{2006\ln 2}\right) + C$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$ ***d)*** $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$ ***e)*** $\frac{1}{\ln 2}2^x\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + C$ ***f)*** $-xe^{-2x} + C$

g) $\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin^2 x) - 2x + C$ ***h)*** $-2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C$ ***i)*** $\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

j) $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$ ***k)*** $\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + C$ ***l)*** $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$

m) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$ ***n)*** $(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4})\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x+C$

o) $2^x(\frac{1}{\ln 2}x^2-\frac{2}{\ln^2 2}x+\frac{2}{\ln^3 2})+C$ ***p)*** $2x\sin x-x^2\cos x+C$

q) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ ***r)*** $\frac{1}{1+\ln^2 2}2^x(\sin x+(\ln 2)\cos x)+C$

s) $x^2+x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$ ***t)*** $(\ln x)\cdot(\ln(\ln x)-1)+C$

u) $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$

- **Racionális törtfüggvények**

a) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C$ ***b)*** $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ ***c)*** $\ln\frac{(x-2)^4}{|x-1|}+C$ ***d)*** $\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+C$

e) $\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$

- **Módszerek kombinációja**

a) $-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)+\ln\frac{1-x}{1+x}+C$ ***b1)*** $\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C$ ***b2)*** $\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C$ ***c)*** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$

d) $x\,\mathrm{tg}x+\ln|\cos x|+C$ ***e)*** $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$ ***f)*** $\frac{1}{3}\sin x^3-\frac{x^3}{3}\sin x^3+C$

g) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$ ***h)*** $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$

10.1. Trükkös feladatok

1. FELADAT

Integrálja a függvényt elemi integrálással. Ha szükséges (márpedig szükséges), először alakítsa át azonosságok / egyszerűsítések segítségével alapintegrálok lineáris kombinációjává!

a) $\sqrt[2005]{x}$ ***b)*** $\frac{(x-\cos x)^2-1+x\sin x(2\,\mathrm{ctg}\,x-x\sin^2 x)}{(x\sin x)^2}$ ***c)*** $\frac{x^4-1}{x+1}$

d) $\sqrt{x}-\frac{2}{x}+3x-4+5\sin x-\frac{\cos x}{6}+7e^x$ ***e)*** $\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2-(x-1)^2}$ ***f)*** $\frac{x\sqrt{\sqrt[3]{2x}\cdot x^3}}{\sqrt{x}}$

g) $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2$ ***h)*** $\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-x}$ ***i)*** $\frac{x^3-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$ ***j)*** $\frac{1}{1+\sqrt{2x^2+1}}+\frac{1}{1-\sqrt{2x^2+1}}$

k) $\frac{x^3-x^2 2^x-3x}{2x^2}$ ***l)*** $\frac{(2-x)^2}{x}$ ***m)*** $3^x(4^x-5^x)$ ***n)*** $\frac{4^{x+1}-4}{2^x+1}$

o) $\dfrac{4^x+2^{x+2}+4}{2^x+2}$ ***p)*** $\dfrac{2\cdot 5^x-5\cdot 2^x}{10^x}$ ***q)*** $(2^x-2)^2$ ***r)*** $\dfrac{4^x-4x}{2\sqrt{x}+2^x}$

s) $\log_2 4^{\sqrt{x}}$ ***t)*** $(\frac{2}{x})^2(x-(xe^{2x})^2)$ ***u)*** $e^{-x}(3^x-2^{x+1})$ ***v)*** $4^{\log_2 x}$

w) $2^{\ln x}$

2. FELADAT

Integrálja a függvényt elemi integrálással. A trigonometrikus kifejezések átalakításához / egyszerűsítéséhez használja fel az ismert azonosságokat, például:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin^2 x+\cos^2 x=1, & \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x \\ & \sin 2x=2\sin x\cos x=(\cos x+\sin x)^2-1=1-(\cos x-\sin x)^2 \end{array}}$$

a) $\cos\pi-\sin x$ ***b)*** $\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ***c)*** $\cos(x-\frac{\pi}{3})$ ***d)*** $4\,\mathrm{ctg}^2\,2x$

e) $\sin^2\frac{x}{2}$ ***f)*** $\dfrac{3\sin^3 x-\sin^2 x+2\cos^2 x+4}{\sin^2 x}$

g) $\sin^3 x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x+\cos^3 x$ ***h)*** $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ ***i)*** $\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sin x+\cos x}$

j) $\dfrac{1-2\sin^2 x}{\sin x+\cos x}$ ***k)*** $\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x+\cos x}$ ***l)*** $\dfrac{\sin^2 2x}{\sin x-\sin^3 x}$ ***m)*** $\dfrac{\cos^3 x-\cos^5 x}{\sin^2 2x}$

n) $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$ ***o)*** $\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$ ***p)*** $(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)^2$ ***q)*** $\dfrac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$

r) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^2 2x}$ ***s)*** $\dfrac{3-4\sin^2 x}{\sin(x+\frac{\pi}{3})}$ ***t)*** $\dfrac{1-4\sin^4 x}{\sin^2 x\cos 2x}$ ***u)*** $(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)\sin 2x$

v) $\dfrac{1-\sin 2x}{\cos x-\sin x}$ ***w)*** $\dfrac{4\,\mathrm{ctg}\,2x}{\sin 2x}$ ***x)*** $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\mathrm{ctg}^2 x$ ***y)*** $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}$

z) $(1+\cos x)\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

Megoldókulcs

1. feladat

a) $\frac{2005}{2006}x^{\frac{2006}{2005}}+C$ ***b)*** $-\mathrm{ctg}\,x+\frac{1}{x}-\cos x+C$

c) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\ln x+\frac{3}{2}x^2-4x-5\cos x-\frac{1}{6}\sin x+7e^x+C$

d) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C,\quad x\neq -1$ ***e)*** $\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}\ln|x|+C$ ***f)*** $\frac{6\cdot\sqrt[6]{2}}{19}x^{\frac{19}{6}}+C,\quad x>0$

g) $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x+C$ ***h)*** $-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C,\quad x>0$ ***i)*** $\frac{1}{3}x^3-x+C,\quad x\neq 0$

j) $\frac{1}{x}+C$

k) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2\ln 2}2^x-\frac{3}{2}\ln|x|+C$

l) $\frac{1}{2}x^2-4x+4\ln|x|+C$

m) $\frac{1}{\ln 12}12^x-\frac{1}{\ln 15}15^x+C$

n) $\frac{4}{\ln 2}2^x-4x+C$

o) $\frac{1}{\ln 2}2^x+2x+C$

p) $\frac{5}{\ln 5}5^{-x}-\frac{2}{\ln 2}2^{-x}+C$

q) $\frac{1}{\ln 4}4^x-\frac{4}{\ln 2}2^x+4x+C$

r) $\frac{1}{\ln 2}2^x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

s) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

t) $4\ln|x|-e^{4x}+C$

u) $\frac{1}{\ln 3-1}\left(\frac{3}{e}\right)^x+\frac{2}{1-\ln 2}\left(\frac{2}{e}\right)^x+C$

v) $\frac{1}{3}x^3+C,\quad x>0$

w) $\frac{1}{\ln 2+1}x^{\ln 2+1}+C$

2. feladat

a) $-x+\cos x+C$

b) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)+C$

c) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+C=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+C$

d) $-2\operatorname{ctg}2x-4x+C=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-4x+C$

e) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$

f) $-3x-3\cos x-6\operatorname{ctg}x+C$

g) $\sin x-\cos x+C$

h) $1+\cos x+C$

i) $\frac{\sqrt{2}}{2}x+C$

j) $\sin x+\cos x+C$

k) $\sin x-\cos x-x+C$

l) $-4\cos x+C$

m) $\frac{1}{4}\sin x+C$

n) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$

o) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}x+C$

p) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$

q) $\sqrt{2}(\sin x-\cos x)+C$

r) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}x+C$

s) $6\sin x+2\cos x+C$

t) $2x-\operatorname{ctg}x+C$

u) $2x+C$

v) $\sin x+\cos x+C$

w) $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$

x) $x+C$

y) $x+C$

z) $-\cos x+C$