# 8. Taylor-polinom, függvényközelítés

## Definíció

$$f^{(i)}(x_0) = T_n^{(i)}(x_0) \qquad (i = 0, \ \ldots, n)$$

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!}(x - x_0)^i$$

## Hibabecslés

$$\left| T_n(x) - f(x) \right| \le \operatorname*{Max}_{u \in [x_0-\epsilon,\, x_0+\epsilon]} \left( \frac{|f^{(n+1)}(u)|}{((n+1)\,!)} \right) \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

## Példa.

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{3}{2}} = 1$$

A deriváltak:

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x_0) = f'(1) = \tfrac{3}{2}1^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{2}$$

$$f''(x) = \tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}, \; f''(x_0) = f''(1) = \tfrac{3}{4}1^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{4}$$

$$f'''(x) = -\tfrac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}, \; f'''(x_0) = f'''(1) = -\tfrac{3}{8}1^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{3}{8}$$

$$f^{IV}(x) = \tfrac{9}{16}x^{-\frac{5}{2}}, \; f^{IV}(x_0) = f^{IV}(1) = \tfrac{9}{16}1^{-\frac{5}{2}} = \tfrac{9}{16}$$

Ezeket a Taylor-formulába helyettesítve:

$$T_n(x) = T_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{24}(x - x_0)^4 =$$

$$= 1 + \tfrac{3}{2}(x-1) + \frac{\frac{3}{4}}{2}(x-1)^2 + \frac{-\frac{3}{8}}{6}(x-1)^3 + \frac{\frac{9}{16}}{24}(x-1)^4 = 1 + \tfrac{3}{2}(x-1) + \tfrac{3}{8}(x-1)^2 - \tfrac{1}{16}(x-1)^3 + \tfrac{3}{128}(x-1)^4$$

(Itt $(x–x_0)$ hatványainál nem végezzük el a négyzetre, köbre, stb. emelést és összevonást!)

Közelítés az $x$=0,6 helyen: mivel $(x–x_0)=(x–1)=0{,}6–1=–0{,}4$, így:

$$0{,}6^{\frac{3}{2}} = f(0{,}6) \approx T_4(0{,}6) = 1 + \tfrac{3}{2}(-0{,}4) + \tfrac{3}{8}(-0{,}4)^2 - \tfrac{1}{16}(-0{,}4)^3 + \tfrac{3}{128}(-0{,}4)^4 =$$

$$T_4(0{,}6)=1-\tfrac{3}{2}\cdot 0{,}4+\tfrac{3}{8}\cdot 0{,}16+\tfrac{1}{16}\cdot 0{,}064+\tfrac{3}{128}\cdot 0{,}0256=1-0{,}6+0{,}06+0{,}004+0{,}0006=0{,}4646\,.$$

## 1. FELADAT

Határozzuk meg az $f(x)$ függvény megadott $x_0$ pont körüli $n$-edrendű Taylor-polinomját, és ennek segítségével számítsuk ki a megadott függvényérték közelítését!

a) $f(x) = e^{1-x}$, $n=3$, $x_0=1$; $f(0{,}7)\approx?$ b) $f(x) = 3 - \ln (1-x)^3$, $n=4$, $x_0=0$; $f(0{,}2)\approx?$

c) $f(x) = \sqrt{x^3}$, $n=4$, $x_0=1$; $f(0{,}6)\approx?$ d) $f(x) = \sqrt{2x+2}$, $n=3$, $x_0=1$; $f(1{,}4)\approx?$

e) $f(x) = \sin x$, $n=4$, $x_0=\pi$; $f(\pi-0{,}3)\approx?$ f) $f(x) = 6\sin^2 x$, $n=4$, $x_0=\frac{\pi}{2}$; $f(\frac{\pi}{2}+0{,}01)\approx?$

g) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n=3$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; $f(\frac{\pi}{4}+0{,}03)\approx?$ h) $f(x) = \operatorname{tg} x^2$, $n=2$, $x_0=0$; $f(-0{,}1)\approx?$

i) $f(x) =1{,}5\left(e^x+e^{-x}\right)$, $n=4$, $x_0=0$; $f(0{,}01)\approx?$ j) $f(x) =e^{-x^2/2}$, $n=4$, $x_0=0$; $f(0{,}1)\approx?$

k) $f(x) = e^{1-\cos x}$, $n=3$, $x_0=0$; $f(0{,}1)\approx?$ l) $f(x) = \ln (8\sin^6 x)$, $n=4$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; $f(\frac{\pi}{4}+0{,}01)\approx?$