7. Teljes függvényvizsgálat

Az $f(x)$ függvény teljes függvényvizsgálatának lépései:

$f(x)$ közvetlen vizsgálata:

(1) Értelmezési tartomány (ÉT), folytonosság, szakadási helyek megállapítása

(2) Speciális tulajdonságok (párosság, páratlanság, periodikusság) megállapítása

(3) Tengelymetszetek: y-tengely: $x=0 \Rightarrow y=f(0)$; x-tengely: $y=0 \Rightarrow x$: $f(x)=0$ megoldása (ha lehet)

(4) (Féloldali) határértékek meghatározása az ÉT határainál (pl. szakadási helyek, esetleg $-\infty$ ill. $+\infty$)

$f'(x)$ vizsgálata $\Rightarrow f(x)$ monotonitása, helyi szélsőértékei

(5) $f'(x)$ meghatározása (deriválás), hol értelmezett (azaz $f(x)$ hol differenciálható)

(6) Kritikus pontok–I: töréspontok keresése (ahol $f(x)$ értelmezett, de nem differenciálható)

(7) Kritikus pontok–II: stacionárius pontok: az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai

(8) Táblázat készítése: osztópontok a kritikus pontok és a szakadási helyek. A köztes szakaszokon $f'(x)$ előjele nem változik és meghatározza $f(x)$ növő / csökkenő tulajdonságát és ezáltal, hogy melyik osztópont lokális szélsőértékek-hely. Utóbbiakat behelyettesítve $f(x)$-be, megkapjuk a függvény helyi szélsőértékeit (kiszámítandók).

$f''(x)$ vizsgálata $\Rightarrow f(x)$ konvexitása, inflexiós (a leggyorsabb növekedés) pontjai

(9) Lehetséges inflexiós pontok: az $f''(x)=0$ egyenlet megoldásai

(10) Táblázat készítése: osztópontok a lehetséges inflexiós pontok és a szakadási helyek. A köztes szakaszokon $f''(x)$ előjele nem változik és meghatározza $f(x)$ konvex / konkáv tulajdonságát és ezáltal, hogy melyik osztópont inflexiós hely. Utóbbiakat behelyettesítve $f(x)$-be, megkapjuk az inflexiós pontok y-koordinátáit is (kiszámítandók, ha nem túl komplikált).

(11) A b) táblázat helyett készíthetünk olyan bővített táblázatot, amely egyszerre tartalmazza az 1)d) táblázatot $f'(x)$ előjelére és a 2)b) táblázatot $f''(x)$ előjelére, de így két könnyebben áttekinthető táblázat helyett egy nehezebben áttekinthetőhöz jutunk, viszont ebből egyből elkészíthető $f(x)$ ábrája. A két egyszerűbb táblázat

megállapításainak egyesítése az ábrakészítés folyamán is figyelembe vehető, ily módon nincsen szükség a bonyolultabb 2)c) táblázat elkészítésére.

- ### Ábra készítése (függvénygrafikon szabadkézi vázlata)

(12) Megjelölendő pontok: tengelymetszetek, lokális szélsőértékek és inflexiós pontok; esetleg az $f(x)$ függvény egy-két könnyen kiszámítható pontja (pl. $x=\pm 1$, stb.).

(13) E pontok összekötése görbe vonallal a köztes szakaszokra megállapított növő / csökkenő ill. konvex / konkáv tulajdonságok, valamint az osztópontok szélsőérték- ill. inflexiós tulajdonságai figyelembe vételével; majd a görbe meghosszabbítása a végeknél a határértékek alapján.

(14) Az $f(x)$ függvény értékkészletének (ÉK) megállapítása a kiszámított határértékek, lokális vagy globális szélsőértékek, és a függvény grafikonja alapján.

Feladatok

1. FELADAT

Az 6. sz. gyakorló feladatsorban található grafikonokra végezzen teljes függvényvizsgálatot.

2. FELADAT

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a megadott függvényre:

a) $2x^2+3x-2$ ***b)*** x^3-3x ***c)*** $2x^3-9x^2+12x$ ***d)*** $x^4-4x^3+4x^2$

e) $(x-1)^2(x^2-x+8)$ ***f)*** $x+\dfrac{1}{x}$ ***g)*** $x-\dfrac{1}{x}$ ***h)*** $2x^2-\sqrt{x}$

i) $\dfrac{1}{1-x^2}$ ***j)*** $\ln(4x-x^2)$ ***k)*** $x-\ln x^2$ ***l)*** $\dfrac{x}{e^x}$

m) $\dfrac{e^x}{x}$ ***n)*** xe^x ***o)*** xe^{-x^2} ***p)*** $x\ln x$

3. FELADAT

Vizsgálja meg az alábbi függvényekkel leírt folyamatok tulajdonságait:

a) Logisztikus változások: $\dfrac{e^{\alpha x}}{A+Be^{\alpha x}}$; $\dfrac{1}{A+Be^{\alpha x}}$ $A, B, \alpha > 0$

b) Egyszerű kiürülés, telítődés: $Ae^{-\alpha x}$; $A(1-e^{-\alpha x})$ $A, \alpha > 0$

c) Normális eloszlás: e^{-x^2}; $Ae^{-\frac{(x-m)^2}{D^2}}$

d) Áramlás, telítődés-kiürülés:

$$e^{-2x}-e^{-3x};\quad e^{-\alpha x}-e^{-\beta x};\quad Ae^{-\alpha x}-Be^{-\beta x}\quad A\ge B\ge 0, \alpha>\beta>0$$