6. Formális differenciálási szabályok

Elemi függvények deriváltjai

Hatványfüggvény $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R$

$$\left(\sqrt[\beta]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)' = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1}, \quad \beta \in R, \beta \neq 0$$

Exponenciális függvény $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$

$$(e^x)' = e^x$$

Logaritmusfüggvény $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad x > 0,\ a > 0$

$$\ln x = \log_e x;\ (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Trigonometrikus függvények

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \equiv \mathrm{tg}^2 x + 1$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \equiv -\mathrm{ctg}^2 x - 1$$

Általános szabályok

Függvény konstans-szorosának deriváltja: $(cf(x))' = cf'(x)$

Összeg differenciál-hányadosa: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Különbség differenciál-hányadosa: $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Szorzat differenciál-hányadosa: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Hányados differenciál-hányadosa: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Összetett függvény deriváltja (láncszabály): $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Speciális esetek $(\ln g(x))' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$, ha $g(x) > 0$

$$((g(x))^{\alpha})' = \alpha\,(g(x))^{\alpha-1} \cdot g'(x)$$

$$(a^{g(x)})' = (a^{g(x)} \ln a) \cdot g'(x)$$

$$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Logaritmikus differenciálás: $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$

A logaritmus segítségével szorzatot összegre, hányadost különbségre, hatványt szorzatra vezethetünk vissza; pl.:

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln x^{\frac{1}{x}}\right)' = f(x) \cdot (x^{-1} \ln x)' = f(x) \cdot (-x^{-2} \ln x + x^{-1} \tfrac{1}{x}) = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Példák

$\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$; $\left(2^{\operatorname{tg} x}\right)' = \left(2^{\operatorname{tg} x} \ln 2\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$; $\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$

$(\lg(\cos x))' = \dfrac{-\sin x}{\cos x \cdot \ln 10}$; $(\ln(1+e^x))' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

$(\sin(\ln x))' = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$; $(\cos(x^2-1))' = -\sin(x^2-1)) \cdot 2x$

$(\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x))' = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)}$; $\left(\operatorname{ctg}\left(x+\sqrt{\pi}\right)\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2\left(x+\sqrt{\pi}\right)}$

Alapfeladatok

1. FELADAT

Differenciálja az alábbi függvényeket az alapműveletekre vonatkozó szabályok felhasználásával!

a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ b) $3\sin x - \operatorname{tg} x + 2\pi^2$ c) $2^x(\sqrt{2x} - 3\sqrt[3]{x})$ d) $\left(3\operatorname{tg} x - \dfrac{2}{x^3}\right) \cdot \lg x$ e) $\sin^2 x + \cos^2 x$

f) $\dfrac{e^x - x^{2005}}{\sqrt[2006]{x}}$ g) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ h) $\dfrac{x^4 + \pi x^2 - \frac{e}{2}}{2x^5 - x^3 + 9x}$ i) $\dfrac{x \operatorname{ctg} x}{x + \ln x} - \sqrt{2}$ j) $\dfrac{\sqrt{x}(e^x+1)}{\log_{0,5} x}$

2. FELADAT

Differenciálja az alábbi függvényeket az összetett függvényre vonatkozó láncszabály alapján!

a) $\log_2(-x)$ b) e^{-2x} c) $\cos\frac{x}{2}$ d) $\sqrt{-4x}$ e) $(e^x - x^e)^{2,71828}$

f) $e^{-\cos x + \sin x}$ g) $\sin 2x + \cos 2x$ h) $\sqrt[2005]{x^{2006} - x}$ i) $\cos(\cos x)$

j) $\exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)$ k) $\exp\left(e^x\right)$ l) $\exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)$ m) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

n) $\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ o) $\sqrt[-1]{\log_2 \tfrac{x}{2}}$ p) $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{100}$ q) $\sin\left(\cos\left(\pi^x\right)\right)$

r) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{ctg}\left(x^\pi\right)\right)$

3. FELADAT

Differenciálja az alábbi függvényeket a megfelelő differenciálási szabályok alkalmazásával!

a) $\tfrac{1}{2}e^{4x}-\tfrac{1}{3}4^{3x-1}$ b) $x^3(\operatorname{tg}3x-\operatorname{ctg}2x)$ c) $\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}}$ d) $3^{-x}\log_3\left(1+x^3\right)$

e) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x^2+2}$ f) $(1+x^2)\sqrt{1-x^2}$ g) $\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}-\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x}$ h) $e^{-x}\sin 2x$

i) $x^e\ln\left(1+e^x\right)-e\cdot x^{2\pi}$ j) $(2\operatorname{ctg}x-\lg x)^{-2}$ k) $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-x^{-4}}}{\operatorname{tg}4x}$

l) $\dfrac{\cos^2 x+\cos x^2}{x^2}$ m) $e^{\sin x}\ln(\sin x)$ n) $\operatorname{ctg}(\operatorname{tg}x)-\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}x)$

o*) $\sqrt[3]{\dfrac{3^x\operatorname{tg}x}{\ln 2x}}$ p*) $\dfrac{(1-2x^2)\sin x}{e^{2x}\cdot\sqrt{x^2+1}}$ q*) $(\cos x)^{\operatorname{tg}x}$ r*) $x^x\cdot\sqrt[x]{2}$

s*) $\left(\sin x+\cos x\right)^{\sin x-\cos x}$ t*) $\sqrt[x]{x}$

■ Értelmezés, differenciálhatóság, derivált

4. FELADAT

Hol értelmezett ill. hol differenciálható az alábbi függvény? Határozzuk meg a derivált függvényt! (+-feladat: ábrázolja is az eredeti függvényt és adja meg az értékkészletét.)

a+) $\sqrt[3]{x-1}$ b) $\log_2\left(1-\cos^2 x\right)$ c+) $e^{2\cdot\ln(1-x)}$ d) $\operatorname{ctg}\sqrt{x}$

e) $\sqrt{\sin x}$ f+) $\sqrt{\cos x-1}+1$ g) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2+x}}$ h) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

i) $2^{-x}\cdot x^{-2}$ j) $\ln(\operatorname{tg}x)$ k+) $\dfrac{\sqrt{-x}+1}{-1+\sqrt{x}}$ l+) $\sqrt[\ln x]{x}$