Teaching Mathematics and Statistics in Sciences, Modeling and Computer-Aided Approach

IPA HU-SRB/0901/221/088

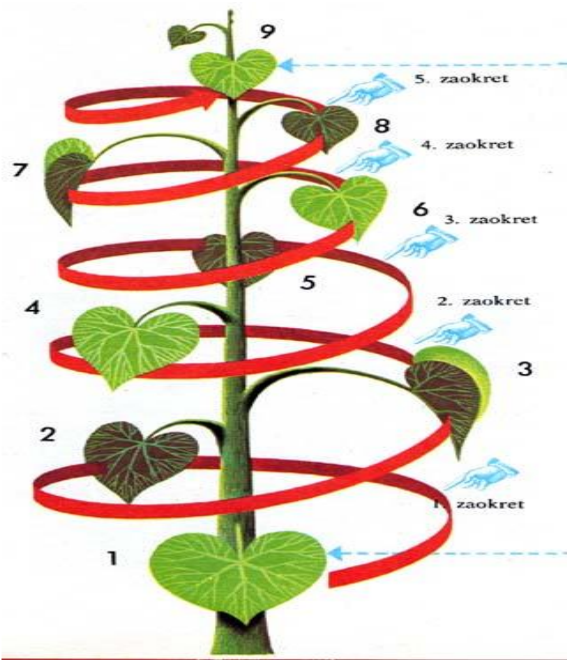
Процес математичког моделирања у настави математике

Ђурђица Такачи [1], *Душка Пешић* [2], *Јелена Татар* [2]

[1] *Департман за математику и информатику,*
Природно математички факултет,
Универзитет у Новом Саду

[2] *Гимназија ''Јован Јовановић Змај'', Нови Сад*

djtak@dmi.uns.ac.rs



Нови Сад
2011

Садржај

1. Увод

Математички модели, као и процес математичког моделирања су веома често заступљени у настави математике и природних наука. У данашње време са продором нове технологије мењају се и наставна средства, тако да математичко моделирање, а посебно математички модели добијају нову интерактивну димензију, која представља новину у наставном процесу. Са дидактичке тачке гледишта интерактивне презентације представљају велики изазов и она су предмет многобројних истраживања која потврђују њихов позитиван утицај на формирање и усвајање математичких појмова а посебно на повезивање математичких појмова са реалним светом.

У раду се приказују процеси математичког моделирања који полазе од:

- различитих математичких формула, биномни образац, степени броја 11, природних и полигоналних бројева, геометријских објеката, низова, графика функција;
- појава из природних наука, деоба живих ћелија, распад атома;
- различитих реалних ситуација, као што су поручивање јела у ресторану, бојења са три, четири, пет боја и друго, а увек долази до таквог математичког модела, који је заснован на Паскаловом троуглу.

Посебна пажња у раду је посвећена Фибоначијевом низу и његовој вези са Паскаловим троуглом.

У раду се приказују интерактивне презентације како математичких формула, тако и појава из реалног света. Интерактивне презентације су урађене у програмском пакету Power point, и убачене су у рад помоћу хиперлинка, тако да се и активирају десним кликом на њихову ознаку.

2. Блејз Паскал

Блејз Паскал (Blaise Pascal) је рођен 1623, године у Клермонту у Француској. Његов отац који га је образовао је одлучио да га не учи математику пре петнаесте године. У дванаестој години, Блејз је сам одлучио да учи геометрију и тада је открио да је *збир унутрашњих углова троугла једнак двоструком правом углу*.

Слика 1.

Паскал се никада није оженио због своје одлуке да се посвети науци. После низа здравствених проблема, Паскал је умро1662. године у својој 39. години.

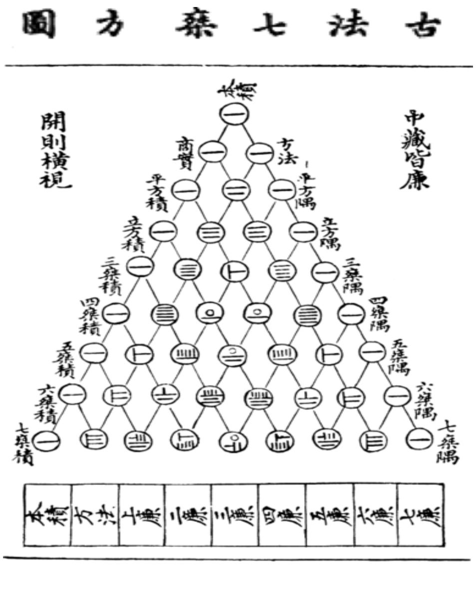
Године 1968 програмски језик, PASCAL, је назван по Блејзу Паскалу.

Паскалов троугао је такође назван по Блејзу Паскалу, јер веома много математичких формула повезао са Паскаловим троуглом, односно то био само један од његових многобројних пројеката.

Први писани подаци о Паскаловом троуглу потичу још од Индијског математичара Пингала, 460 године пре нове ере где се спомиње и Фибоначијев низ, као и збир дијагонала Паскаловог троугла.

Иначе Паскалов троугао је открио кинески математичар Chu Shu-Kie 1303. године.

На слици 2 је приказан оригинали запис таквог троугла.



Слика 2.

3. Конструкција Паскаловог троугла

Конструкција Паскаловог (слика 3) троугла изводи се на следећи начин:
На почетку, на врху троугла, се у нултој врсти упише број 1.
У првој врсти се напишу две јединице.
У свакој врсти први број је 1 и може се сматратити као збир 1+0.

Даље се основна идеја састоји у томе да саберемо два броја изнад (из једне врсте), и да добијени збир упишемо у кућицу (у средину) испод, односно у следећу врсту.

Ови кораци се понављају све док се ред не попуни, и тада се поступак понавља на нови ред.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 90 210 252 210 90 45 10 1
1 11 55 135 300 462 462 300 135 55 11 1
1 12 66 190 435 762 924 762 435 190 66 12 1

Слика 3. Конструкција Паскаловог троугла

4. Биномна Формула и Паскалов троугао

Коефицијенти у биномној формули

$$(a+b)^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=1\cdot a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+1\cdot b^n,$$

где је $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, чине $n-$ ту врсту, $n=1,2,3,\ldots$ у Паскаловом троуглу, јер је познато је да важи $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

5. Степени броја 11 и Паскалов троугао

$$11^0 = 1$$
$$11^1 = 11$$
$$11^2 = (10+1)^2 = 100 + 2\cdot 10 + 1 = 121$$
$$11^3 = (10+1)^3 = 1000 + 3\cdot 100 + 3\cdot 10 + 1 = 1331$$
$$11^4 = (10+1)^4 = 10000 + 4\cdot 1000 + 6\cdot 100 + 4\cdot 10 + 1 = 14641$$
$$11^5 = (10+1)^5 = 100000 + 5\cdot 10000 + 10\cdot 1000 + 10\cdot 100 + 5\cdot 10 + 1 = 161051$$
$$11^6 = (10+1)^6 = 1000000 + 6\cdot 100000 + 15\cdot 10000 + 20\cdot 1000 + 15\cdot 100 + 6\cdot 10 + 1 = 1771561$$

До четврте врсте Паскаловог троугла важи:

n-та врста Паскаловог троугла представља запис n-тог степена броја 11.

Посматрајмо 11^5:

$$11^5 = (10+1)^5 = 10^5 + 5\cdot 104 + 10\cdot 103 + 10\cdot 102 + 5\cdot 10 + 1 = 161051$$

Затим посматрајмо 5. врсту Паскаловог троугла:

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

и упоредимо са петим степеном броја 11. У петој врсти Паскаловог троугла јављају се двоцифрени бројеви.

- Цифри јединица одговара први број са десне стране у Паскаловом троуглу, 1.
- Цифри десетица одговара други број са десне стране у Паскаловом троуглу, 5.
- Цифри стотина одговара цифра јединица трећег броја са десне стране у Паскаловом троуглу, 0.
- Цифра хиљада одговара збиру цифре десетица трећег броја и цифре јединица четвртог броја са десне стране у Паскаловом троуглу, 1.
- Цифра десетине хиљада одговара збиру цифре десетица четвртог броја и цифре јединица петог броја са десне стране у Паскаловом троуглу, 6.
- Цифра стотине хиљада одговара првој цифри са леве стране 0.

Значи, децимални запис n–тог степена броја 11 очитавамо у n–тој врсти Паскаловог троугла. За степене до четвртог је то лако, док је очитавање записа петог и виших степене из Паскаловог троугла нешто мање очигледно због појаве вишецифрених бројева у троуглу.

6. Природни бројеви и Паскалов троугао

Помоћу Паскаловог троугла можемо изразити и збир природних бројева са фиксираним збиром цифара.

Укупан број свих децималних бројева чији је збир цифара 1 чини прву колону Паскаловог троугла, јер има

1 Једноцифрен број 1
1 Двоцифрен број 10
1 Троцифрен број 100
1 Четвороцифрен број 1000 …

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Слика 4

Укупан број свих децималних бројева чији је збир цифара 2 чини другу колону Паскаловог троугла, јер има

1 једноцифрен број 2
2 двоцифрена броја 20 11
3 троцифрена броја 200 110 101
4 четвороцифрена броја 2000 1100 1010 1001
……

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Слика 5

Укупан број свих децималних бројева чији је збир цифара 3 чини другу колону Паскаловог троугла јер има

1 једноцифрен број 3
3 двоцифрена броја 30 21 12
6 троцифрених броја 300 210 201 111 120 102
10 четвороцифрених бројева 3000 2100 2010
2001 1200 1020 1002 1110 1011 11 01
……

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Слика 6.

Настављајући поступак изводимо следећи закључак:
Укупан број свих једноцифрених, двоцифрених, троцифрених итд. бројева чији је збир цифара n чини n-ту колону у Паскаловом троуглу Природни бројеви.

7. Полигонални бројеви

Полигоналне бројеви су чланови низа чије се формирање геометријски може описати на следећи начин:

- Први број у свакој групи полигоналних бројева је 1 и одговара једном темену полигона.
- Други број је једнак броју темена те врсте полигона (на пример за троугаоне бројеве то је број 3, за квадратне то је број 4, за пентагоналне је број 5 и сл.)
- „Растезањем“ две странице полигона, и додавањем тачака тако да формирамо нов полигон исте врсте, па се сабирањем свих тачака тако добијене фигуре добија трећи полигонални број.

Поступак се наставља на описан начин

Једна формула (the Winton formula) за налажење $n-$тог по реду $x-$тогоналног броја је дата са

$$f_{x,n} = \frac{(n^2-n)}{2}(x-2)+n\,.$$

Троугаони бројеви су чланови низа Троугаони бројеви

$$f_{3,n} = \frac{(n^2-n)}{2}(3-2)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Квадратни бројеви су чланови низа Квадратни бројеви

$$f_{4,n} = \frac{(n^2-n)}{2}(4-2)+n = n^2.$$

Пентагонални бројеви су чланови низа Пентагонални бројеви

$$f_{5,n} = \frac{(n^2-n)}{2}(5-2)+n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Веза између полигоналних бројева и Паскаловог троугла може се приказати на следећем слајду Полигонални бројеви.

Низ квадратних бројева се може представити као

- збир два низа троугаоних бројева $f_{3,n} + f_{3,n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2$
- разлика два низа тетраедарних бројева $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = n^2\,.$

Уопштењем троугаоних бројева добијамо тетраедралне и хипертетраедарне бројеве који су респективно чланови низа:

$$f_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad f_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

8. Електронска конфигурација атома

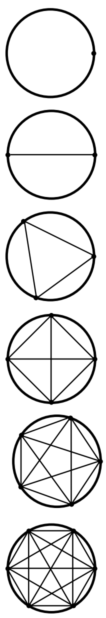
Атом се састоји од протона, неутрона и електрона. Електрони се налазе у енергетском омотачу атома, који окружује језгро, попуњавају љуске. Прва љуска може имати највише 2 електрона, друга 8, и тако даље са одговарајућим бројем протона. Значи максимални број електрона, $Z_{\max}$, који окружују језгро атома и налазе се у n-тој љуски се може одредити на основу формуле:

$$Z_{\max} = 2 \cdot n^2.$$

Значи, укупан број електрона једнак је двостуком квадратном броју, односно полигоналном броју.

9. Тачке на кругу

Број тачака, дужи и многоуглова на кругу се може повезати са Паскаловим троуглом на следећи начин (слика 7) [Тачке на кругу](#):



БРОЈ:	тачака	дужи	троуглова	четвороуглова	петоуглова	шестоуглова
	1					
	2	1				
	3	3	1			
	4	6	4	1		
	5	10	10	5	1	
	6	15	20	15	6	1

Слика 7.

10. Деоба живе ћелије

Ћелија је основна јединица грађе и функције сваког живог организма. Као таква способна је да самостално продужи живот захваљујући способности да замени или надокнади своју супстанцу.

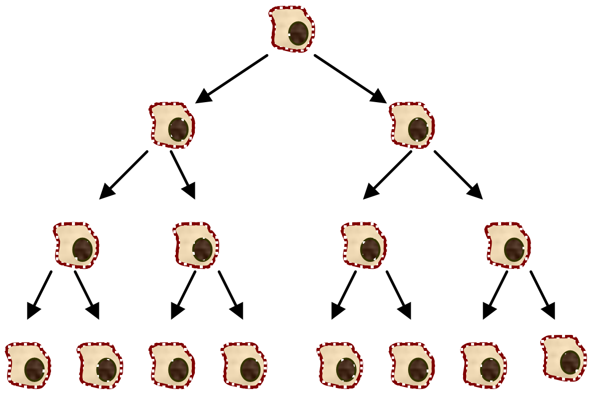
Процеси који карактеришу животни циклус ћелије одигравају се на уређен и контролисан начин. Они се остварују сменом два периода, интерфазе и ћелијске деобе.

Ћелијска деоба је способност ћелије да се подели и на тај начин формира две ћерке ћелије.

Један начин деобе ћелије је митоза која подразумева да се ћелија мајка дели на две једнаке ћелије кћери, а она сама престаје да постоји. То можемо описати на следећи начин (слика 8)

- У почетном (нултом) тренутку имамо само једну ћелију (мајку), C_0.
- После првог циклуса деобе, она анхилира и даје две ћелије кћери, $2\,C_1$.
- После другог циклуса деобе, свака од ових ћелија анхилира и добијамо четири ћелије кћери, $4\,C_2$.
- После трећег циклуса деобе свака од ћелија C_2 анхилира и даје по две ћелије кћери, значи укупно имамо осам нових ћелија, $8\,C_3$.

Након n циклуса деобе имаћемо 2^n ћелија исте старости, што одговара геометријском низу са количником 2.



Слика 8

Други приступ деоби ћелије подразумева да ћелија мајка поделом даје две ћелије, али једну ћелију своје генерације и једну ћелију наредне генерације (слика 9).

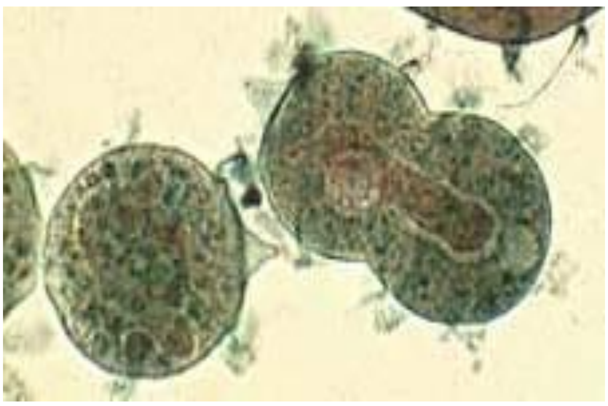
- У почетном (нултом) тренутку имамо само једну ћелију (мајку), C_0.
- После првог циклуса деобе, она се дели на две ћелије, једну своје C_0 и једну наредне генерације C_1. Имамо две ћелије различитих

- генерација $C_0 + C_1$.
- После другог циклуса деобе, свака од ових ћелија се дели на ћелију своје и ћелију наредне генерације. Ћелија C_0 даје по једну ћелију генерација C_0 и C_1, ћелија C_1 даје по једну ћелију генерација C_1 и C_2, па укупно имамо по једну ћелију генерације C_0 и C_2 две ћелије генерације C_1, односно $C_0 + 2\,C_1 + C_2$.
- После трећег циклуса деобе свака од ових ћелија даје по једну ћелију своје и по једну наредне генерације, па добијамо $C_0 + 3\,C_1 + 3\,C_2 + C_3$.
- После четвртог циклуса деобе поново свака од ових ћелија даје по једну ћелију своје и по једну наредне генерације, па добијамо $C_0 + 4\,C_1 + 6\,C_2 + 4\,C_3 + C_4$.
- После петог циклуса имамо $C_0 + 5\,C_1 + 10\,C_2 + 10\,C_3 + 5\,C_4 + C_5$, итд.

Приметимо да је овде број ћелија након *n* циклуса деобе такође 2^n, које у овом случају неће бити све међусобно исте.

$1\,C_0$	1
$1\,C_0 + 1\,C_1$	2
$1\,C_0 + 2\,C_1 + 1\,C_2$	4
$1\,C_0 + 3\,C_1 + 3\,C_2 + 1\,C_3$	8
$1\,C_0 + 4\,C_1 + 6\,C_2 + 4\,C_3 + 1\,C_4$	16
$1\,C_0 + 5\,C_1 + 10\,C_2 + 10\,C_3 + 5\,C_4 + 1\,C_5$	32
$\vdots$	$\vdots$

Слика 9.



Слика 10. Деоба ћелије

11. Паскалов троугао у ресторану

Помоћу Паскаловог троугла се може одговорити на питање: Како наручити јело?

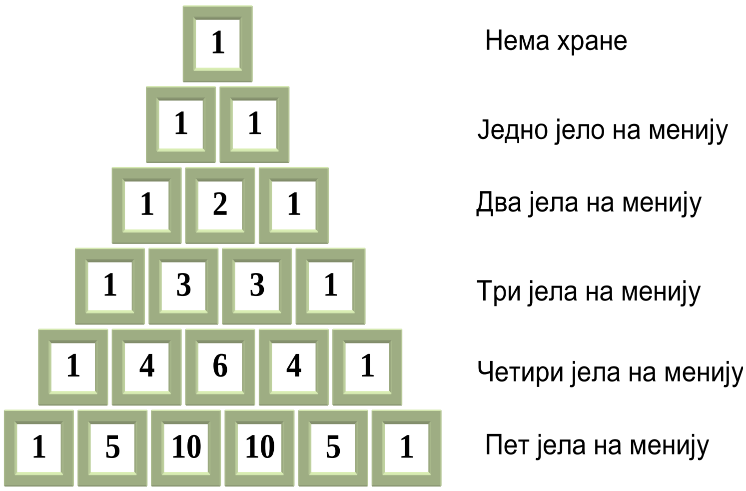
У зависности од врсте ресторана, односно од броја јела која се у ресторану могу послужити, гост може пожелети различите комбинације јела.

Ако у ресторану нема хране, тада се не може ништа поручити.

Ако ресторан има само једно јело, тада га гост може или не мора узети.

Ако ресторан има два јела, тада гост може узети оба јела, или свако посебно, или не мора узети ни једно.

Настављајући поступак можемо направити следећу симулацију и повезати са Паскаловим троуглом (слика 11).



Слика 11. Како наручити јело?

12. Бацање новчића

Приликом бацања једног новчића може пасти писмо или глава. Приликом бацања два новчића могу пасти истовремено:

- два писма
- писмо и глава, или глава и писмо
- оба писма.

Бацање три и више новчића можемо такође симулирати помоћу Паскаловог троугла:

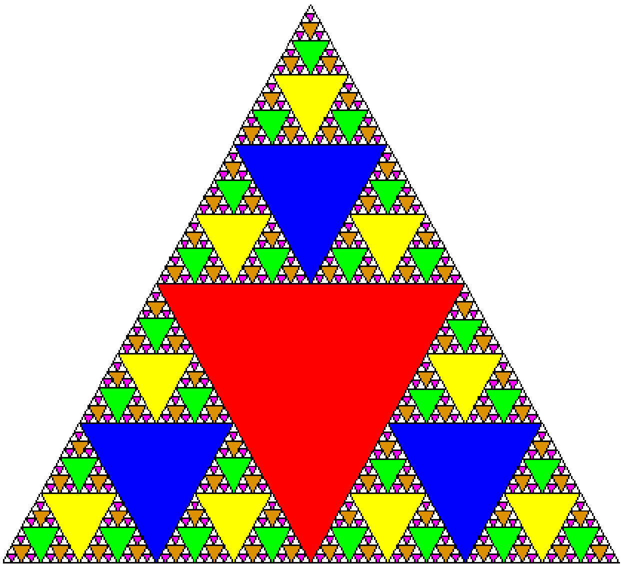
Слика 12. [Бацање новчића]

13. Троугао Сиерпинског

Фрактали су геометријски облици који, најједноставније речено, дају исти број детаља независно од тога коју резолуцију користимо. Другим речима, фрактале је могуће увеличавати бесконачно много, при сваком новом увећењу виде се детаљи који пре увећања нису били видљиви, а при томе је количина приказаних детаља отприлике остала иста.

За њих се често каже и да су самослични („цело је слично свом увећаном детаљу“), али и неправилни да би се описали једноставном геометријом (нпр. права није фрактал иако се може рећи да је самослична).

Један од најједноставнијих фрактала је Троугао Сиерпинског, који с формира тако што полази од једнакостраничног троугла, у њега се упише и обоји једнакостранични троугао, па се у сваки од добијених не обојадисаних једнакостраничних троуглова поново упише и обоји једнакостраничан троугао, и тако даље [Троугао Серпинског].



Slika 13.

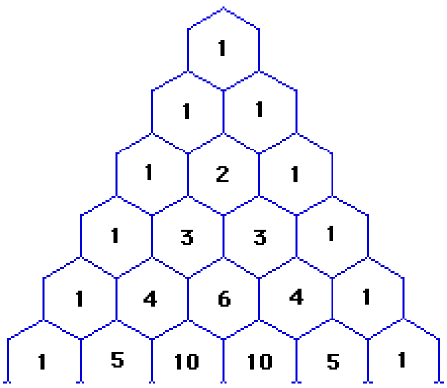
14. Слагање боја помоћу Паскаловог троугла

Паскалов троугао се може користити и за добијање различитих интересантних слика. Бојење се врши тако што се прво одабере број боја b, па се тада сваком броју по модулу b додели по једна боја.

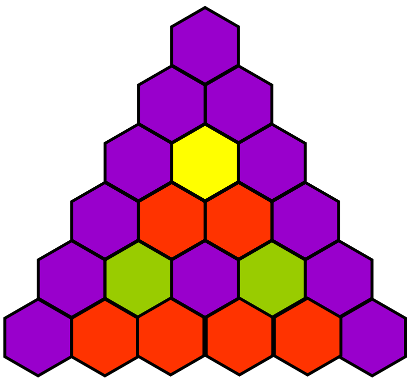
Приказаћемо бојење са 5 боја користећи Паскалов троугао (слике 14 и 15). Нека:

- броју 1 одговара љубичаста боја;
- броју 2 одговара жута боја;
- броју 3 одговара плава боја;
- броју 4 одговара зелена боја;
- Броју 0 одговара црвена боја,

тада се добија следећа слика

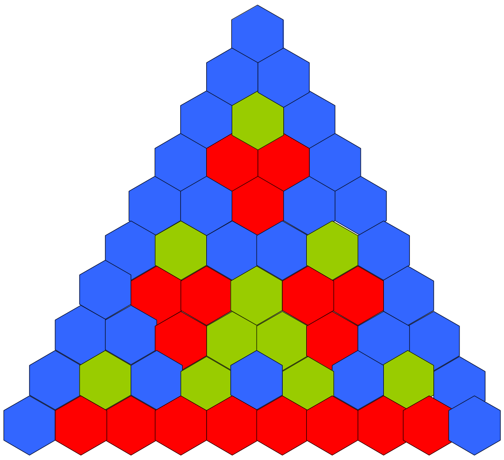


Слика 14.

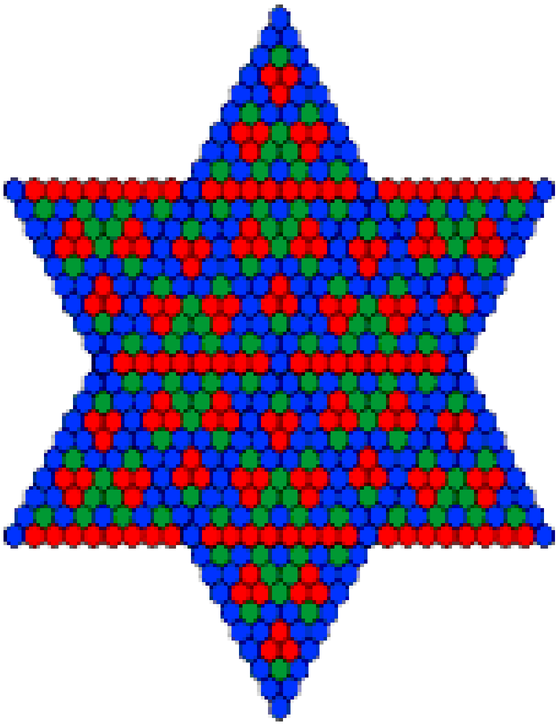


Слика 15.

Бојењем са три боје (на приказани начин) добија се слика 16, а када се споји дванаест таквих слика добија се слика 17.

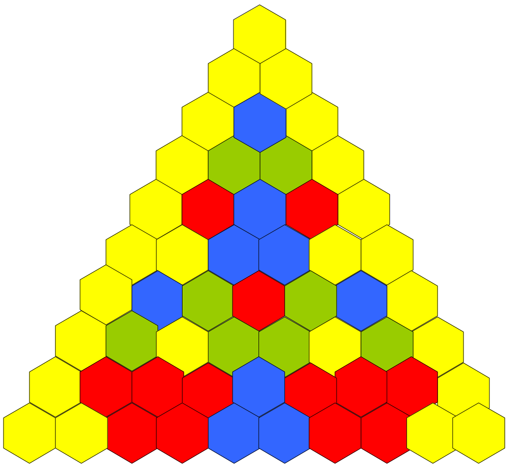


Слика 16.

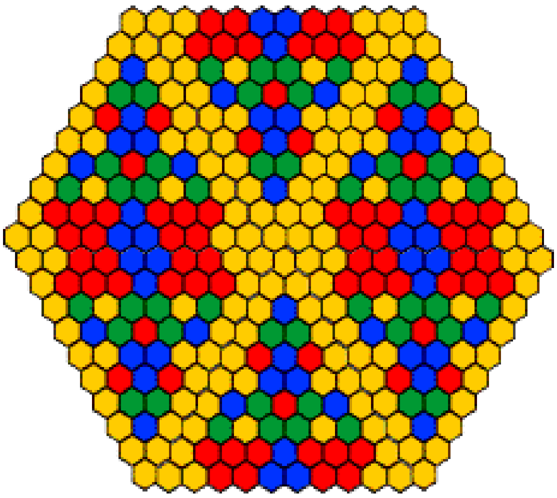


Слика 17.

Бојењем са четири боје и спајањем 6 таквих троуглова добија се



Слика 18.



Слика 19.

15. Фибоначијев низ и Паскалов троугао

Фибоначијев низ је дат рекурентном формулом $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, и чланови низа су

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

Фибоначијев низ се може помоћу програског пакета GeoGebra приказати као: [Фибоначијев низ](#).

Човек купује пар зечева и узгаја њихово потомство по следећем реду (слика 20):

Родитељски пар зечева означимо са бројем 1.

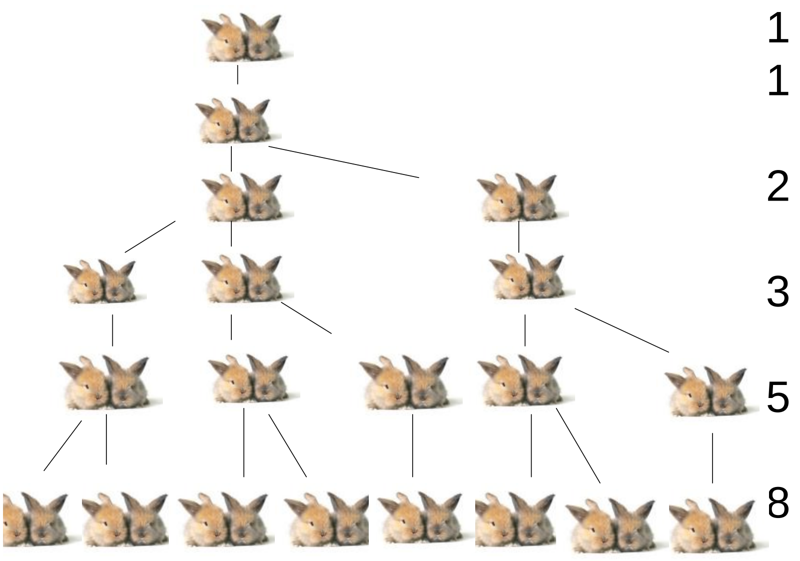
После првог месеца роди се пар младих зечева (прва генерација), који такође означимо са 1.

Након другог месеца родитељски пар добије још један пар и тада се код родитеља прекида даље размножавање, али пар зечева из прве генерације такође добије пар нових зешева. Број парова је сада 2.

Овај начин размножавања важи и за све потомке родитељског пара. Сваки нови пар зечева даће у две узастопне године по један пар младих а након тога ће његово размножавање бити прекинуто.

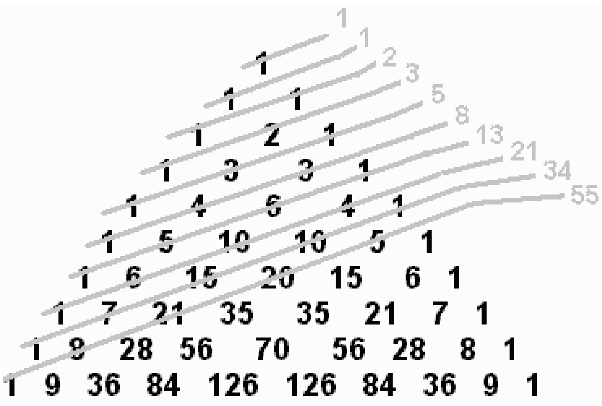
У четвртом месецу младе добијају: један пар прве генерације и два пара друге генерације, па је број парова 3.

У петом месецу ће бити 5 пари зечева, у шестом осам пари зечева и тако даље. Број парова зечева након сваког месеца одговара Фибоначијевом низуи моѕемо рећи да ћемо после пола године имати 21 пар зечева, а после годину дана 233 пара зечева.

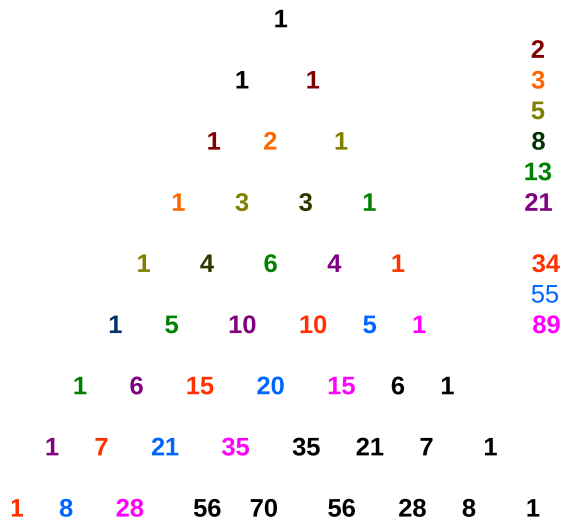


Слика 20. [Фибоначијеви зечеви](#)

Ако сумирамо бројеве на дијагоналама Паскаловог троугла добијамо низ Фибоначијевих бројева.



Слика 21.



Слика 22.

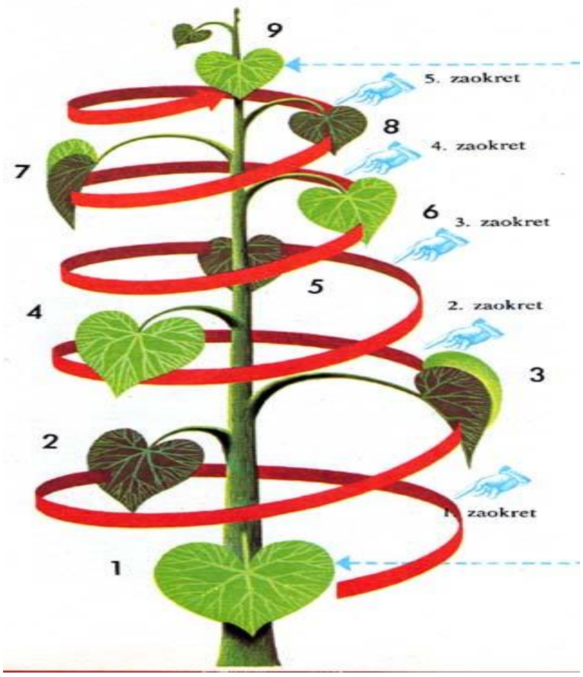
Ако се сваки члан Фибоначијевог низа подели следећим чланом Фибоначијевог низа добија се низ x_n, $n \in N$, чији су чланови дати са:

1/1 1/2 2/3 3/5 5/8 8/13 13/21 21/34 34/55 55/89 ……..

Очигледно је да Фибоначијев низ дивергира, међуртим низ количника Фабоначијевих бројева, или Фибоначијевих разломака, x_n, конвергира ка златном пресеку. Показаћемо како се Фибоначијеви разломци могу пронаћи међу листовима који су израсли на стабљици. Може се рећи да се раст нових листова на једној стабљици одвија по спирали, тако да количник броја заокрета спирале и одговарајућег броја међупростора између листова представља Фибоначијев разломак.

На стабљици на слици 23, се виде листови и спирала која прати раст листова. На пример, Фибоначијев разломак 2/3 се може посматрати као количник броја 2, броја пуних зокрета спирале и броја 3, броја међупростора између листова 1 и 4.

Аналогно, је Фибоначијев разломак је 5/8 количник броја 5, броја пуних заокрета спирале и броја 8, броја међупростора између листова један и девет.



Слика 23

Посматрајмо низ Фабоначијевих разломака, који је дат са $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, n \in N,$ где су $f(x_n)_{n\in N}$, чланови Фибоначијевог низа. Низ $(x_n)_{n\in N}$, се може написати као

$$x_n = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}\,.$$

Значи чланови низа су дати са:

$$2,\quad \frac{3}{2} = 1.5,\quad \frac{5}{3} = 1.667,\quad \frac{8}{5} = 1.6,\quad \frac{13}{8} = 1.625,\quad \frac{21}{13} = 1.615\,.$$

Посматраћемо два подниза $(x_{2k-1})_{k\in N}$, $(x_{2k})_{k\in N}$, низа $(x_n)_{n\in N}$ и показати да они конвергирају ка истој граничној вредности.

Индукцијом се показује да низ $x_{2k-1}, k \in N,$ опада, низ $x_{2k}, k \in N,$ расте. Сви чланови низа су се налазе у интервалу $(1,2)$, тако да су оба подниза датог низа конвергента. Ако означимо са

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = p, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = l,$$

Тада ћемо показати да је $p = l.$ На основу

$$x_{2k-1} = 1 + \frac{1}{x_{2k-2}},\ k \in N, \qquad x_{2k} = 1 + \frac{1}{x_{2k-1}},\ k \in N,$$

добија се

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-2}}, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}},$$

односно

$$p = 1 + \frac{1}{l}, \quad l = 1 + \frac{1}{p}.$$

Једноставном заменом се добија једначина $p^2 - p - 1 = 0$, чије је решење $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, гранична вредност подниза x_{2k-1}, низа $x_n, n \in N$. Аналогно се добија и да је $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, односно низ $(x_n)_{n\in N}$ конвергира ка златном пресеку.

За чланови Фибоначијевог низа, f_n, важи Бинетова формула:

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

где је $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$, гранична вредност количника Фибоначијевог низа, златни пресек.

На основу претходне две реалације чалнови Фибоначијевог низа се могу писати:

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}, \quad n \in N.$$

Фибоначијев низ у природи се може видети на сајту:

http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm.

У својим презентацијам Ирина Бојаџијева, што се може видети на сајту је приказивала Фибоначијеве спирале у природи:

http://www.lima.ohio-state.edu/people/iboyadzhiev/GeoGebra/spiralInNature.html

аналогно као што су аутори направили:

Фибоначијева спирала (Наредбом „крени" може се добити анимација)

Фибоначијева спирала са квадратима (Наредбом „крени" може се добити анимација)

Фибоничијева спирала у природи (Могу се мењати слике које одговарају спирали)

Литература

[1] Colledge, T., *Pascal's Triangle: A Teacher's Guide with Blackline Masters*, Tarquin Publications UK, 1997., pp. 40

[2] Hopkins J., *Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea*, New Ed edition, 2002.

[3] Мићић, В., Ивановић, Ж., Огњановић, С., *Математика за II разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.

[4] Шербан, Н., Цвијан, М., Јанчић, Р., *Биологија за I разред гимназије и пољопривредне школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004.

[5] http://ptri1.tripod.com/

[6] http://milan.milanovic.org/math/srpski/deoba/deoba.html

[7] http://www.zeuscat.com/andrew/chaos/sierpinski.html

[8] http://www.andrew.cmu.edu/course/15-354/pics/Sierpinski-subst.jpg

[9] http://junior.britannica.com/eb/art/print?id=57046&articleTypeId=1

[10] http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/pascal_powers2.html

[11] http://hr.wikipedia.org/wiki/Fraktali

[12] www.biologija.infobay.com

[13] www.tehnika.edu.yu