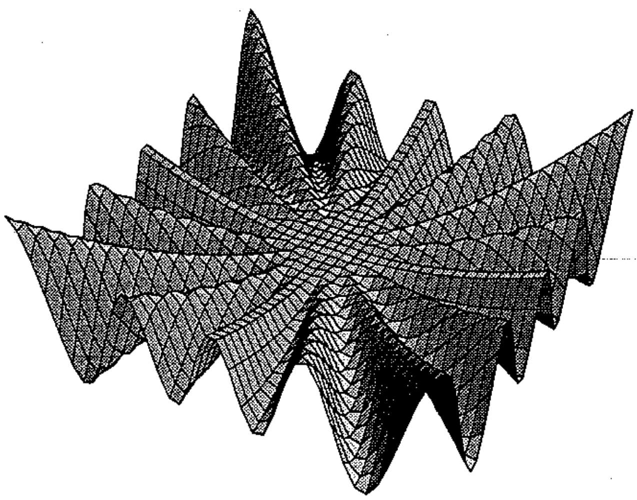
Karsai János

Matematika
gyógyszerészhallgatók számára



Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem
Orvosi Informatikai Intézet
SZEGED
1996.

Differenciálási és integrálási szabályok

$$(cf)' = c\cdot f' \qquad \int cf = c\cdot\int f$$

$$(f+g)' = f'+g' \qquad \int(f+g) = \int f+\int g$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g+f\cdot g' \qquad \int f'g = f\cdot g-\int f\cdot g'$$

$$\left(\tfrac{1}{f}\right)' = -\tfrac{f'}{f^2}$$

$$\left(\tfrac{f}{g}\right)' = \tfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy \quad (y=g(x))$$

$$(\bar{f}(x))' = \tfrac{1}{f'(\bar{f}(x))}$$

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)\cdot x^{\alpha} \qquad \int x^{\alpha}dx = \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad (\alpha\neq-1)$$

$$(\log_a x)' = \tfrac{1}{x\ln a} \qquad \int \tfrac{1}{x}dx = \ln|x|+c$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \int\cos x dx = \sin x+c$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \int\sin x dx = -\cos x+c$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \tfrac{1}{\cos^2 x} \qquad \int\tfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x+c$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\tfrac{1}{\sin^2 x} \qquad \int\tfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x+c$$

$$(a^x)' = a^x\ln a \qquad \int a^x dx = \tfrac{a^x}{\ln a}+c$$

Határozott integrál kiszámítása

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \quad \text{(F(x) egy primitív függvény)}$$

A legfontosabb Taylor sorok

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\dots\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots \quad (|x|<1)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots \quad (|x|<1)
\end{aligned}$$

Jelölések

$\{a, \ldots, b\}$	halmaz	∞	végtelen
$\emptyset$	üres halmaz	$-\infty$	mínusz végtelen
U	alaphalmaz, univerzum	$\|a\|$	abszolút érték
$\in$	halmaz eleme	$\sum$	összegzés
$\bigcup$	halmazok egyesítése	$\prod$	szorzás
$\bigcap$	halmazok metszete	$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$	n-faktoriális
A^c	halmaz komplementere	min	minimum
$\setminus$	halmazok különbsége	max	maximum
Δ	szimmetrikus különbség	$\bar{f}$	inverz függvény
$\subset$, $\subseteq$	részhalmaz	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	sorozat
$\wedge$	logikai ”és”	lim	határérték
$\vee$	logikai ”vagy”	$a_n \to a$	a_n tart a-hoz
$\Rightarrow$	következik (ha, akkor)	f', $\frac{df}{dx}$	derivált
$\Leftrightarrow$	akkor, és csakis akkor	$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$	parciális deriváltak
$\exists$	van olyan	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ldots$	második parc. deriváltak
$\forall$	minden	$\int f(x)dx$	határozatlan integrál
$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$	valós számok, szám n-esek	$\int_a^b f(x)dx$	határozott integrál
$\mathbf{N}$	természetes számok	$\pi \approx$	$3,141592$
$\mathbf{I}$	egész számok	$e \approx$	2.718281
$\mathbf{Q}$	racionális számok		a term. log. alapszáma
$<, \leq$	kisebb, kisebb vagy egyenlő	$\ln x$	természetes logaritmus
$>, \geq$	nagyobb, nagyobb vagy egyenlő		
$[a,b], (a,b)$,			
$[a,b), (a,b]$	intervallumok ([-zárt, (- nyitott)		
$< a, b >$	tetszőleges intervallum		

Előszó

Ez a jegyzet Győri István professzor korábbi előadásai és a saját mostani, a Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem Gyógyszerésztudományi Karán az első éves gyógyszerészhallgatók számára tartott előadásaim alapján készült. A tantárgy céljának megfelelően, a jegyzet tartalmazza azokat a matematikai alapfogalmakat és módszereket, amelyekre a hallgatóknak munkájuk során várhatóan szükségük lesz. Igyekeztem az absztrakt eljárásokat minél érthetőbben megfogalmazni, alkalmazásokkal illusztrálni. A jegyzet 180 ábrát tartalmaz, és 103 példa segíti az elmélet megértését, utal a lehetséges általánosításokra és nehézségekre.

A jegyzet lényegében két fő részre tagolódik. Az első rész (1. fejezet) tartalma néhány pont kivételével a középiskolai tananyagból ismert. Az alapismeretek tömör összefoglalásával el kívánjuk kerülni a középiskolás tankönyvekre való állandó hivatkozást. Áttekintjük a valós számok, a halmazok legfontosabb tulajdonságait, a függvényelmélet alapfogalmait, a legfontosabb elemi függvényeket és néhány grafikus eljárást.

A második részben (2–8. fejezetek) a differenciál- és integrálszámítás elemeivel, azok legfontosabb alkalmazásaival foglalkozunk. Majd a többváltozós függvények fogalmát és néhány tulajdonságát tárgyaljuk. Végül a differenciálegyenletek elméletébe nyújtunk betekintést. Megismertetjük az olvasót néhány alapvető differenciálegyenlettel.

Az olvasó későbbi munkáját szeretném segíteni azzal, hogy a jegyzet bővebb, mint az előadásokon elhangzott és a vizsgán számonkért anyag. Az A. Függelékben található néhány mélyebb ismeretet adó alapkönyv. A C. függelékben egy előzetes vizsgatematikát bocsátunk a hallgatók rendelkezésére.

A jegyzet elektronikus függeléke a több mint száz számítógépes oktatási segédlet és mintafeladat~~ (Mathematica-ban írva)~~, amelyek folyamatosan a hallgatóság rendelkezésére állnak. A jegyzet ábrái a World Wide Web-n a http://www.dmi.szote.u-szeged.hu címen is megtalálhatók.

A jegyzet Latex rendszerrel, az ábrák és grafikonok a Mathematica [1] és IRIS Explorer [2] rendszerekkel Silicon Graphics munkaállomáson készültek. Az ábrák és kiegészítő számítógépes anyagok az Alapítvány a Magyar Felsőoktatásért és Kutatásért 776/94 sz. projekt és a FEFA 1608/4 sz. projekt által támogatott munka eredményei.

Szeretnék köszönetet mondani Győri István professzornak az alaptematika kifejlesztéséért és javaslataiért, az oktatásban résztvevő munkatársaknak és hallgatóimnak az ötletekért és a hibavadászatért. Végül szeretném megköszönni Dr. László Zoltán és Dr. Hajtmann Béla gyors, igen alapos szaklektori munkáját valamint támogató és elgondolkodtató megjegyzéseit.

Szeged, 1996 október

Dr. Karsai János

[1] A Mathematica a Wolfram Research védjegye.
[2] Az IRIS Explorer a Silicon Graphics védjegye.

Tartalom

1. Függvénytani alapfogalmak 1

1.1. Halmazok és tulajdonságaik 1

1.1.1. Műveletek halmazokkal 2

1.2. A valós számok 4

1.3. Koordinátarendszerek, halmazok Descartes-szorzata 6

1.4. Függvények 7

1.4.1. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények és ábrázolásuk 8

1.5. Összetett függvények 9

1.6. Kölcsönösen egyértelmű függvények 10

1.6.1. Kölcsönösen egyértelmű $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények grafikonja 10

1.7. Inverz függvény 10

1.8. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények inverze 11

1.9. Monoton függvények 13

1.10. Néhány fontos tulajdonság 14

1.11. Egyenesek 15

1.12. Hatványfüggvények 17

1.12.1. Nemnegatív egész kitevő 17

1.12.2. Az $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ függvények, negatív kitevőjű hatványok ($n \in N$) 18

1.12.3. Gyökfüggvények 18

1.12.4. Hatványfüggvények tetszőleges valós kitevővel 19

1.13. Függvénytranszformációk 20

1.13.1. A $g(x) = c \cdot f(x)$ transzformáció 20

1.13.2. A $g(x) = f(x) + c$ transzformáció 21

1.13.3. A $g(x) = f(x - p)$ transzformáció 21

1.13.4. A $g(x) = f(-x)$ transzformáció 21

1.14. Másodfokú függvények 22

1.15. Polinomok 23

1.16. Racionális törtfüggvények 23

1.17. Az $f(x) = |x|$ függvény 23

1.18. Trigonometrikus függvények 24

1.19. Függvénytranszformációk, folytatás: a $g(x) = f(cx)$, $(c > 0)$ transzformáció 27

1.20. Az exponenciális függvény 28

1.21. A logaritmus függvény 29

1.22. Logaritmikus függvénytranszformációk, logaritmikus skálák 29

2. Határérték, folytonosság 32

2.1. Határértékproblémára vezető feladatok 32

2.1.1. A függvény érintője, mint határhelyezet 32

2.1.2. A terület, mint határérték 33

2.1.3. Függvények viselkedése a végtelen közelében 34

2.1.4. Függvények határértékének intuitív fogalma 35

2.2. Sorozatok határértéke 35

2.3. Kamatos kamat, az $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, az "e" szám 37

2.4. Függvény határértéke véges pontban 39

2.5. Féloldali határértékek 40

2.6. Folytonos függvények 41

2.7. Végtelen határérték véges helyen 42

2.8. Határértékek a végtelenben 44

2.9. Függvények összehasonlítása 45

2.9.1. Határértékek összehasonlítása 45

2.9.2. "Érintő a végtelenben": aszimptota 46

2.9.3. A $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték vizsgálata, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékek 47

2.9.4. Racionális törtfüggvények határértéke véges helyen . . . 47
2.9.5. Racionális függvények határértéke a végtelenben . . . 48
2.9.6. $A \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték . . . 49

3. A differenciálszámítás elemei **50**
3.1. Bevezetés . . . 50
3.2. A differenciálhányados definíciója . . . 51
3.3. A deriválható függvény folytonossága . . . 54
3.4. Féloldali deriváltak . . . 54
3.5. Differenciálási szabályok . . . 55
3.5.1. A hatványfüggvények differenciálhányadosa . . . 56
3.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ deriváltja . . . 56
3.5.3. Összeg, szorzat és hányados deriváltja . . . 57
3.5.4. Az összetett függvény deriváltja . . . 59
3.5.5. Az inverz függvény deriváltja . . . 60
3.5.6. A logaritmus függvény deriváltja, az $\ln x$ definíciója . . . 60
3.5.7. Az exponenciális függvény deriváltja, e^x, exponenciális növekedés . . . 61
3.6. Lineáris közelítések . . . 61
3.7. Magasabb rendű deriváltak . . . 63
3.8. A derivált fizikai jelentése, sebesség, gyorsulás . . . 63

4. A differenciálszámítás alkalmazásai **64**
4.1. Monotonitás és szélsőértékek . . . 64
4.1.1. Monotonitás . . . 65
4.1.2. Lokális szélsőértékek . . . 66
4.1.3. Differenciálható függvény szélsőértéke . . . 67
4.1.4. Szélsőérték töréspontban . . . 69
4.1.5. Globális szélsőértékek . . . 70
4.2. A konvexitás és a deriváltak kapcsolata . . . 71
4.3. Függvények menetének összehasonlítása, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ alakú határértékek, L'Hospital szabály . . . 74
4.4. Függvények grafikonjának rajzolása, a függvényvizsgálat lépései . . . 75
4.5. Függvények közelítése, Taylor polinomok, Taylor sorok . . . 76
4.5.1. Az e^x Taylor polinonjai az $x_0 = 0$ körül . . . 80
4.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül . . . 81
4.5.3. Az $1/(1 \pm x), \ln(1 \pm x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül . . . 82

5. A határozatlan integrál: a deriválás megfordítása **84**
5.1. A primitív függvény, a határozatlan integrál definíciója . . . 84
5.2. Egyszerű integrálási szabályok . . . 86
5.3. A parciális integrálás szabálya . . . 87
5.4. A helyettesítéses integrálás szabálya . . . 88

6. A határozott integrál **89**
6.1. A függvény változásának előállítása deriváltjából . . . 89
6.2. A határozott integrál definíciója . . . 91
6.3. A határozott integrál tulajdonságai . . . 92
6.4. A határozott integrál becslése, integrálközép . . . 93
6.5. A területfüggvény és tulajdonságai, az integrálszámítás alaptétele . . . 94
6.6. Az integrál alkalmazásai . . . 98
6.6.1. Területszámítási feladatok . . . 98
6.6.2. Test mozgása . . . 99
6.6.3. Munka kiszámítása . . . 100
6.6.4. Vonal ívhosszának kiszámítása . . . 100

6.6.5. Forgástestek térfogatának kiszámítása 101
6.7. Közelítő integrálási formulák 102

7. Többváltozós függvények **104**
7.1. Definíció, ábrázolás 104
7.1.1. Ábrázolás grafikonnal 104
7.1.2. Ábrázolás szintvonalakkal, szintfelületekkel 105
7.2. Szélsőértékek, parciális deriváltak 106
7.3. A legkisebb négyzetes közelítés 109

8. Közönséges differenciálegyenletek **112**
8.1. A differenciálegyenletek definíciója, geometriai jelentése 112
8.2. A kezdetiérték probléma és megoldása 114
8.3. Egyensúlyi helyzetek 115
8.4. Autonóm differenciálegyenletek 116
8.5. Az $x' = ax$ egyenlet 116
8.5.1. Egyszerű szaporodási folyamat 117
8.5.2. Születési-halálozási folyamat 117
8.6. Az $x' = ax + b$ differenciálegyenlet 118
8.6.1. Korlátozott növekedés 119
8.6.2. Születési folyamat lehalászással 120
8.6.3. Születési és bevándorlási folyamat 120
8.7. Az $x' = a(A - x)(B - x)$ differenciálegyenlet 121
8.7.1. Korlátozott növekedési folyamat 122
8.7.2. Korlátozott növekedés lehalászással 122
8.7.3. Kémiai reakciók 123
8.8. Az $x' = a(A - x)^2$ egyenlet 124
8.9. Általánosítások, nemautonóm egyenletek, szétválasztható egyenletek 125
8.10. Magasabb rendű egyenletek, lineáris egyenletek megoldása 126
8.11. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek 128
8.11.1. Egy gyógyszerfelszívódási modell 131

A. Függelék. További irodalom **132**

B. Függelék. Függvények tanulmányozása számítógéppel **132**

C. Függelék. A vizsga témakörei 1996-ban **133**