8. Közönséges differenciálegyenletek

8.1. A differenciálegyenletek definíciója, geometriai jelentése

Emlékezzünk vissza a primitív függvény keresésének feladatára (5.1. fejezet). Ha adva van az $f(x)$ függggvény, akkor keressük azt az $F(x)$ függvényt, amelynek deriváltja $f(x)$. Más szavakkal, az $f(x)$ függvényt ismerve meg kell oldanunk az

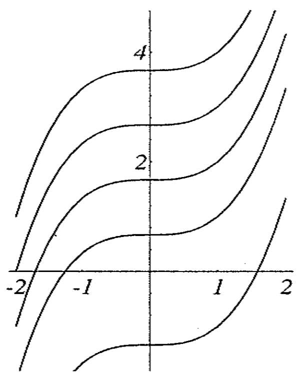
$$F'(x) = f(x)$$

egyenletet. Az egyenlet megoldásai az $f(x)$ primitív függvényei, amelyek egy hozzáadott konstansban különböznek egymástól. Pontosan egy megoldást kapunk, ha az $F(x)$ függvényt valamely x_0 pontban rögzítjük. Ez a megoldás

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(u)du$$

alakú. Ha például $f(x) = x^2$, akkor

$$F(x) = c + \frac{x^3}{3}, \quad F(0) = c.$$



Ebben a fejezetben a primitív függvény keresésének feladatát általánosítjuk.

A primitív függvény keresésének egyféle gyakorlati interpretációjaként idézzük fel a mozgó test példáját. Legyen $x(t)$ a test helyzete a t pillanatban. Feladatunk, hogy az $x'(t)$ pillanatnyi sebesség ismeretében meghatározzuk magát az $x(t)$ függvényt.

A problémák többségében azonban nem ismerjük az $x'(t)$ sebesség explicit képletét, csupán a függvény, a deriváltja és az idő között ismerünk valamilyen összefüggést, törvényt. Például, Newton második törvényében

$$x'' = \frac{F(x,t)}{m},$$

ahol $x''(t)$ a test gyorsulása és az F erő nemcsak időben változhat, hanem a helytől is függ. Ez a helyzet a matematikai inga esetén, ahol az erő a kitérés szögének szinuszával arányos és a kitéréssel ellentétes irányú (3.6. pont). Így egy

$$x'' = -k \sin x$$

alakú egyenlethez jutunk, ahol az $x(t)$ függvényt kell meghatároznunk. Az összefüggés ennél sokkal bonyolultabb is lehet.

A fenti fizikai interpretáció az alapja, hogy a továbbiakban a független változót t-vel jelöljük, a keresett függvényre az $x(t), y(t), z(t)$ jelöléseket használjuk. A jelölést egyszerűsítendő, a függvények argumentumait gyakran nem írjuk ki.

Általában, *az*

$$F(t, x, x') = 0$$

egyenletet, amely kapcsolatot teremt egy $x(t)$ függvény, $x'(t)$ deriváltja és a t független változó között, **elsőrendű differenciálegyenletnek** *nevezzük. Ha innen x' kifejezhető, akkor az*

$$x' \doteq f(t, x)$$

explicit, elsőrendű differenciálegyenletet *kapjuk.*

Számos kémiai, biológiai folyamat változása elsőrendű egyenlet szerint történik. Speciális esetként kapjuk az

$$x' = f(t)$$

differenciálegyenletet, melynek megoldásai, mint tudjuk, az $f(t)$ primitív függvényei.

Ha az egyenletben szerepelnek magasabb rendű deriváltak is, és az előforduló legmagasabb rendű derivált $x^{(n)}(t)$, akkor n-edrendű differenciálegyenletről beszélünk. A matematikai inga egyenlete másodrendű egyenlet. Megjegyezzük, hogy a Newton-törvény szerint a fizikai mozgások mozgástörvényét másodrendű differenciálegyenletek írják le.

A differenciálegyenletek elméletének alapvető fogalmait az elsőrendű egyenleteken keresztül mutatjuk be. Később másodrendű egyenletekkel is foglalkozunk (8.10. pont).

A differenciálegyenlet megoldásakor feladatunk ugyanaz, mint az integrálás esetén. Az egyenletből határozzuk meg az ismeretlen $x(t)$ függvényt. Ezért nevezzük gyakran a differenciálegyenlet megoldásának folyamatát az egyenlet integrálásának.

Az elsőrendű differenciálegyenlet **megoldásának** *nevezünk minden olyan differenciálható függvényt, amely kielégíti az egyenletet.*

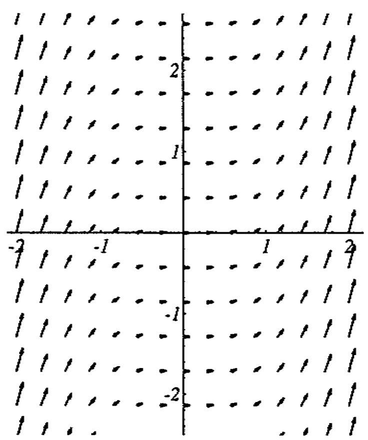
Geometriai jelentés

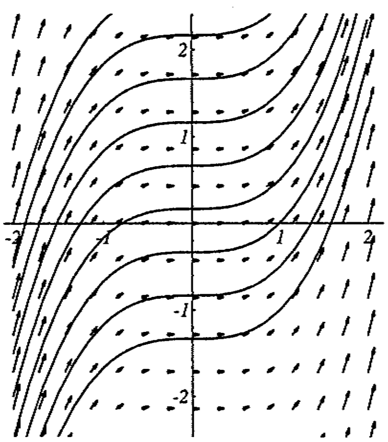
A **differenciálegyenlet geometriai jelentését** a határozatlan intergálnál látottakhoz hasonlóan kapjuk.

Tekintsük ismét az

$$x' = t^2$$

egyenletet. Ismételjük el a határozatlan integrál geometriai interpretációjánál elmondottakat (5.1. fejezet). Ha az egyenlet valamely $x(t)$ megoldása átmegy a (t_0, x_0) ponton, akkor ott a grafikon érintőjének meredeksége t_0^2. Ezért az érintő egy irányvektora $(1, t_0^2)$. Rajzoljuk meg a megfelelő $(1, t^2)$ irányvektort minden (t, x) pontban. Az ábrázolhatóság miatt vehetjük a vektorok valamilyen konstansszorosát is. Az egyenlet megoldásai (a t^2 primitív függvényei) minden pontban simán érintkeznek a megfelelő vektorral. A 5.1. fejezetben nem vektorokat, hanem érintődarabokat rajzoltunk. A vektorok előnye, hogy nem csak az érintkezés tényét, hanem a megoldások változásának irányát is jelzik. Az eredményt láthatjuk az alábbi ábrákon.





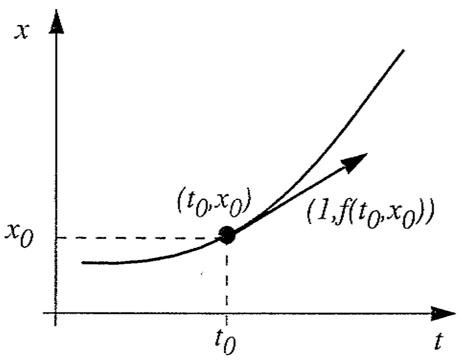
Alkalmazzuk ugyanezt a technikát az általános

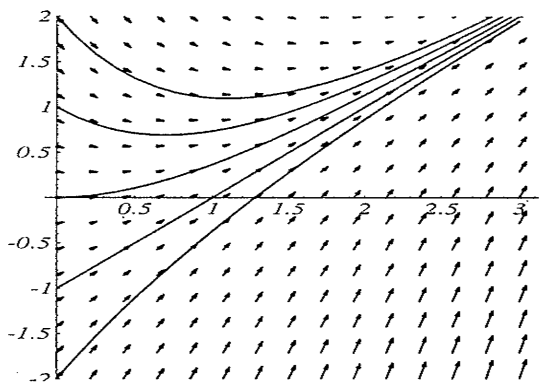
$$x' = f(t, x)$$

egyenletre. Ha $x(t)$ az egyenlet egy (t_0, x_0) ponton átmenő megoldása, akkor $x'(t_0) = f(t_0, x_0)$, ezért az érintő irányvektora $(1, f(t_0, x_0))$. *Adott (t_0, x_0) pontból indulva rajzoljuk meg az $(1, f(t_0, x_0))$ irányvektort (baloldali ábra). Ezt minden pontra elvégezve a differenciálegyenlethez tartozó* **iránymezőt** *kapunk.* Vegyük észre, hogy az iránymező megrajzolásához nem kell az egyenletet megoldanunk. Az egyenlet bármely $x(t)$ megoldásának $(t, x(t))$ pontbeli érintője az iránymező innen induló vektora. Megjegyezzük, hogy a jobb ábrázolhatóság kedvéért a vektorokat egységesen kicsinyíthetjük, vagy nagyíthatjuk.

A fentiek alapján azt mondhatjuk, hogy a differenciálegyenlet megoldása az iránymezőhöz illeszkedő függvények keresését jelenti.

A jobboldali ábra az $x' = -x + t$ egyenlet iránymezőjét és néhány megoldását tartalmazza.





Ezután a vizsgált egyeneletek megoldásait mindig az iránymezővel együtt ábrázoljuk. Az iránymező segít elképzelni a fel nem rajzolt megoldásokat is.

8.2. A kezdetiérték probléma és megoldása

A geometriai értelmezés alapján világos, az egyenlet megoldása nem egyetlen függvény, hanem egy *függvénysereg.*

Az egyenlet megoldásaként kapott függvények seregét a differenciálegyenlet **általános megoldásának** *nevezzük.* Speciálisan, az $x' = f(t)$ egyenlet általános megoldása az $f(t)$ függvény határozatlan integrálja.

Ha a keresett megoldás értékét rögzítjük valamely t_0 pillanatban, az

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

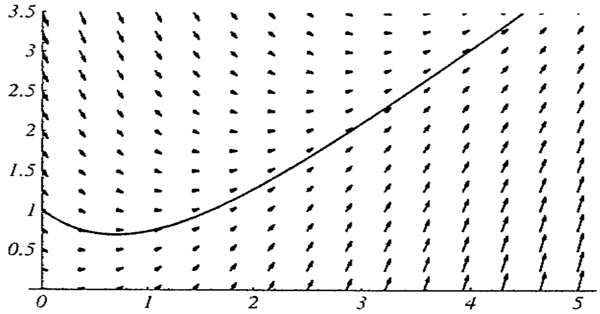
kezdetiérték problémát kapjuk. Ennek megoldását a kezdetiérték probléma megoldásának vagy partikuláris megoldásnak nevezzük.

A határozatlan integrál példája alapján sejthetjük, hogy a kezdetiérték problémának egyetlen megoldása van. Azonban az egyenlet jobboldalán álló függvény igen általános lehet, ezért, *előfordulhat, hogy nincs az adott kezdeti feltételt kielégítő megoldás. Máskor a megadott kezdeti feltételt több függvény is kielégíti.* Ezeket a szélső eseteket zárja ki az $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás létezését és egyértelműségét biztosító alábbi tétel.

8.1. Tétel. *Ha az $x' = f(t,x)$ differenciálegyenlet jobboldala (kétváltozós függvény!) folytonos mindkét változója szerint valamely, az (t_0, x_0) pont körüli kör belsejében, akkor az $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték problémának legalább egy megoldása létezik.*

Ha a $\partial f(t,x)/\partial x$ parciális derivált létezik és folytonos valamely, a (t_0, x_0) pont körüli kör belsejében, akkor az $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték problémának pontosan egy megoldása létezik.

Az ábrán az $x' = -x + t$, $x(0) = 1$ kezdetiérték probléma megoldását látjuk.



A magasabb rendű egyenletek esetén gyakran előfordul, hogy olyan megoldást keresünk, amelynek az $x(t_0) = x_0$ és $x(t_1) = x_1$ feltételeket kell kielégíteni. Például a koncentráció kezdeti- és végértéke adott, és az oldódás lefolyása érdekel bennünket. Az ilyen feladatokat **peremérték problémának** nevezzük.

Vannak egyenletek, ahol az egyenlet megoldását nem lehet formulával előállítani, mint például az

$$x'' = -\sin x$$

másodrendű egyenlet esetén. Ekkor különösen fontosak az olyan módszerek, amelyekkel az eredeti egyenlet megoldásait közelítjük, vagy a megoldásainak tulajdonságait azok ismerete nélkül próbáljuk jellemezni.

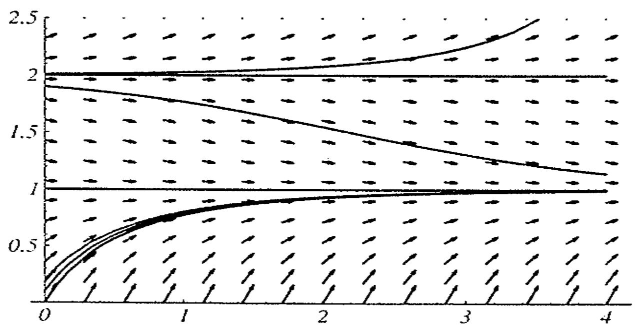
A vázolt problémák, feladatok messze túlmutatnak kereteinken. A továbbiakban a gyógyszerésztudományban, orvostudományban leggyakrabban előforduló egyenletekkel foglalkozunk.

8.3. Egyensúlyi helyzetek

Legyen az x_0 érték olyan, hogy minden t-re $f(t, x_0) = 0$. Ekkor az $x(t) = x_0$ konstans függvény megoldása az $x'(t) = f(t,x)$ differenciálegyenletnek. Fordítva, ha az $x(t) = x_0$ függvény megoldás, akkor $f(t, x_0) = 0$ minden t-re (lásd a 4.1 tételt). Ezekről az értékekről a megoldás nem mozdul el, egyensúlyban van.

A differenciálegyenlet konstans megoldásait az egyenlet **egyensúlyi helyzeteinek** *nevezzük.* Az egyensúlyi helyzetek az $f(t,x)$ függvény t-től független zéróhelyei.

8.1. Példa. Az $x' = (x-1)(x-2)$ egyenlet egyensúlyi helyzetei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.



8.2. Példa. Az $x' = -x + t$ egyenletnek nincs egyensúlyi helyzete, mert a $-x + t = 0$ egyenlet megoldása $x(t) = t$ nem konstans (nem is megoldása az egyenletnek).

8.4. Autonóm differenciálegyenletek

Vegyük észre a 8.1. pontbeli egyenletek ($x' = t^2$, $x' = -x + t$) iránymezői és megoldásai közti különbséget. Az elsőnél adott t_0 esetén az érintővektorok párhuzamosak minden $t = konstans$ függőleges egyenes mentén, és a megoldásokat függőlegesen eltolva ismét megoldást kapunk (az egyenlet jobboldala csak t-től függött!). Az utóbbi esetben ez nem teljesül. Sőt, éppen fordítva, ha az egyenlet

$$x' = f(x)$$

alakú (az egyenlet jobboldala nem függ t-től!), akkor az érintővektorok az $x = x_0$ egyenesek mentén párhuzamosak, ugyanis az $(1, f(x))$ vektor nem függ a t független változótól. Ezért ha egy megoldást az t-tengely mentén eltolunk, szintén megoldást kapunk. Ez azt jelenti, hogy a folyamat viselkedését nem befolyásolja mikor kezdődik. Ennek nagy gyakorlati jelentősége van. Például a Newton-törvény szerint az inga lengésének lefolyása nem függ attól, hogy reggel vagy délben kezdődik a lengés.

Az olyan egyenleteket, amelyek jobboldala nem függ explicit módon t-től, **autonóm egyenleteknek** *nevezzük.* Zárt, a külvilág hatásától független rendszerek viselkedését írják le ilyen egyenletek. A következő fejezetekben főként ilyen egyenleteket vizsgálunk.

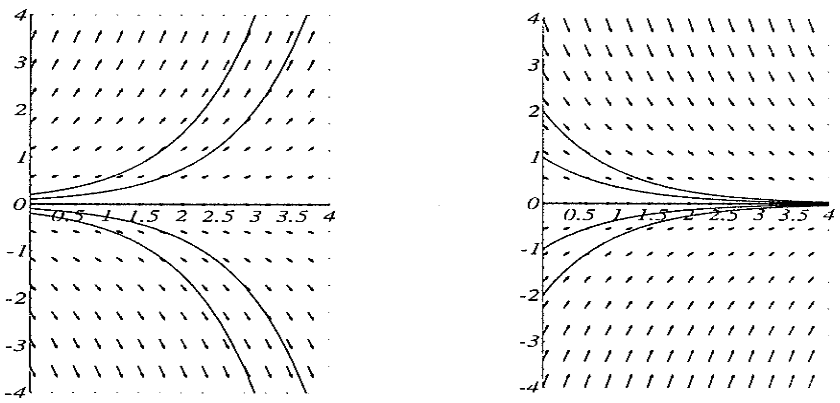
8.5. Az $x' = ax$ egyenlet

Az $x' = -x$ egyenlet speciális esete az egyik legegyszerűbb, de igen fontos

$$x' = ax$$

differenciálegyenletnek, ahol $a \neq 0$ konstans. Itt a változás sebessége arányos a függvény értékével. Ilyen egyenletre vezetnek a nukleáris robbanás ($a > 0$), nukleáris bomlás ($a < 0$) vizsgálata és egyszerű szaporodási problémák. Ezekkel később részletesen vizsgáljuk.

Az $a = \pm 1$ esetekben az iránymezőket és néhány megoldást láthatunk az alábbi ábrán.



Próbáljuk az egyenletet integrálni. Az exponenciális függvények deriváltját ismerve, sejthetjük, hogy a megoldás valamilyen exponenciális függvény lesz.

Ha $x \equiv 0$, akkor $x' \equiv 0$, következésképpen az $x \equiv 0$ függvény megoldás. Ha $x \neq 0$, akkor

$$\frac{x'}{x} = a,$$

amit integrálva kapjuk, hogy

$$\int \frac{x'}{x} dt = \int a\, dt = a \cdot t + c_1.$$

A baloldalt helyettesítéssel integrálva

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c_2.$$

Legyen $c = c_1 - c_2$. Innen

$$\ln|x| = at + c,$$

$$|x| = e^c \cdot e^{at} \qquad (e^c > 0),$$

továbbá

$$x(t) = Ce^{at},$$

ahol $C = \pm e^c$, már lehet negatív vagy 0. A $t = 0$ behelyettesítéssel adódik, hogy $C = x(0)$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$x(t) = x(0)e^{at}.$$

A kapott eredmény teljesen egybeesik elvárásunkkal, mivel $(e^{at})' = ae^{at}$. Látható, hogy ha $x_0 > 0$, akkor a megoldások $a > 0$ esetén exponenciálisan növekednek, $a < 0$ esetén pedig csökkennek. Alkalmazásként tekintsünk néhány gyakorlati problémát.

8.5.1. Egyszerű szaporodási folyamat

Tekintsünk egy populációt (állat, növény stb.). Jelölje $N(t)$ a populáció egyedeinek számát. *Tegyük fel, hogy a populációt egy egyed sem hagyja el, senki nem hal meg, és a szaporodásnak a környezet sem szab határt.*

Nyilván $N(t)$ értékei egész számok, de nagy elemszámú populációnál folytonosnak, differenciálhatónak tekinthetjük. *Tegyük fel továbbá, hogy a szaporodás egyszerű osztódás, ami egy pillanat alatt végbemegy. Nincs eltolódás a fogamzás és a szaporodás ideje között!. Minden egyed azonos időnként osztódik. Ekkor a születések időbeli eloszlása egyenletes.* Egy sejt osztódását az exponenciális függvény definíciójánál már tekintettük. Ezért a népesség számának megváltozása Δt idő alatt

$$\Delta N = \lambda \cdot N \Delta t,$$

ahol λ statisztikusan meghatározott arányossági tényező. Ha $\Delta t \to 0$, az

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N,$$

egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$, ahol N_0 az egyedek száma a kezdeti pillanatban.

8.5.2. Születési-halálozási folyamat

A populáció létszámának változása egyenlő a születések száma mínusz a halálozások száma, azaz

$$\Delta N = \Delta S - \Delta H.$$

Innen a Δt idő alatti változás

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{\Delta H}{\Delta t}$$

Mint az előző példában, ha a populáció elég nagy, $\Delta t \to 0$ esetén kapjuk, hogy

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{dH}{dt}$$

Az előző példa megfontolásaihoz hasonlóan

$$\frac{dS}{dt} = \lambda N, \quad \frac{dH}{dt} = \mu N,$$

ahonnan

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)N.$$

Ha a születési ráta nagyobb, mint a halálozási, akkor a populáció nő, az ellenkező esetben pedig a populáció aszimptotikusan kihal.

8.6. Az $x' = ax + b$ differenciálegyenlet

Tekintsük az

$$x' = ax + b$$

egyenletet. A $b = 0$ esetben az $x' = ax$ egyenletet kapjuk vissza.

Az egyenletet az előző pontban alkalmazott módszerrel oldjuk meg. Keressük az $x(0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást. Az egyenlet átalakításával kapjuk

$$x' = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

Feltehető, hogy $a \neq 0$, ui. ellenkező esetben az $x' = b$ egyenletet kapnánk, aminek megoldásai triviálisan az $x(t) = bt + c$ függvények. Vegyük észre, hogy ha $x = -\frac{b}{a}$, akkor $x' \equiv 0$, tehát az $x(t) = -\frac{b}{a}$ konstans függvény egyensúlyi helyzete az egyenletnek.

Ha $x \neq -\frac{b}{a}$, akkor

$$\frac{x'}{x + \frac{b}{a}} = a.$$

Innen integrálással kapjuk, hogy

$$\int \frac{x'}{x + \frac{b}{a}} dt = \int a \cdot dt = a \cdot t + c.$$

A baloldalon az $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$ helyettesítéssel

$$\int \frac{dx}{x + \frac{b}{a}} = \ln\left|x + \frac{b}{a}\right|,$$

ahonnan

$$\ln\left|x(t) + \frac{b}{a}\right| = at + c$$

$$\left|x(t) + \frac{b}{a}\right| = e^{at+c} = C_0 e^{at} \qquad (C_0 > 0).$$

Az abszolút értéket elhagyhatjuk, és nem kell külön kezelnünk az $x(t) = -b/a$ megoldást, ha a $C_0 > 0$ korlátozást feloldjuk. Így $x(t)$-re általánosan kapjuk, hogy

$$x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}.$$

C jelentése pedig

$$x(0) = x_0 = C - \frac{b}{a}, \qquad \text{ezért } C = x_0 + \frac{b}{a}.$$

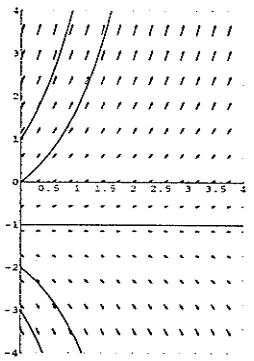
Az egyenlet általános megoldása tehát

$$x(t, x_0) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}.$$

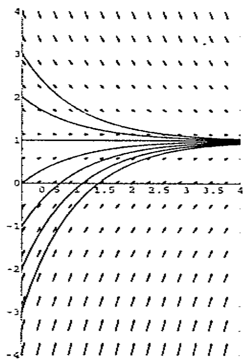
Vizsgáljuk meg, milyenek a megoldások az a és b különböző választásánál. A egyenletben az $a \cdot x$ tag az x értékével arányos változást jelent (pl. születés, nukleáris folyamat stb., lásd az előző pontot!). Ha $a > 0$, az x-szel arányos növekedést, szaporodást jelent (exponenciális növekedés!), $a < 0$ esetén exponenciális csökkenéssel (halálozás, nukleáris lebomlás stb.) van dolgunk. Az egyenletben a b tag időtől, helytől függetlenül konstans mértékben növeli ($b > 0$) illetve csökkenti ($b < 0$) a folyamatot. Ennek jelentése lehet egyenletes sebesség; populációnál állandó, egyenletes bevándorlás ($b > 0$), illetve kivándorlás ($b < 0$), illetve egyenletes sebességű népességszabályozó folyamat lehet. A szabályozásnál gondolhatunk, a termés betakarítására, a felesleges vadállomány rendszeres kilövésére vagy lehalászásra.

Gyógyszeradagolásnál az $a \cdot x$ tag ($a < 0$) a korábban beadott gyógyszer lebomlását írja le, míg a b tag $b > 0$ esetén folyamatos infúzió hatása, $b < 0$ pedig egyenletes sebességű gyógyszerszint csökkentést, méregtelenítést (pl. dialízis) jelenthet. Megjegyezzük, hogy az időtől független sebességre vonatkozó feltétel a gyakorlatban nem mindig teljesül.

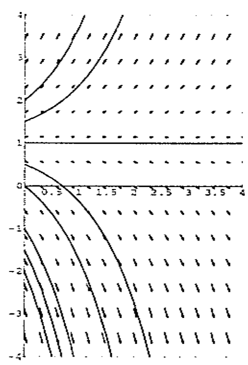
Az alábbi ábrák az iránymezőt és a megoldásokat mutatják $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ esetén.



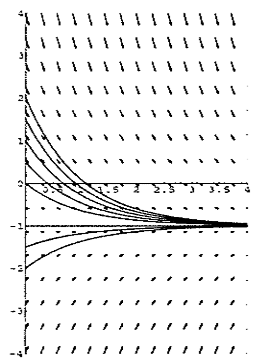
$a=1$, $b=1$



$a=-1$, $b=1$



$a=1$, $b=-1$



$a=-1$, $b=-1$

A vázolt lehetséges interpretációk után tekintsünk néhány alkalmazást.

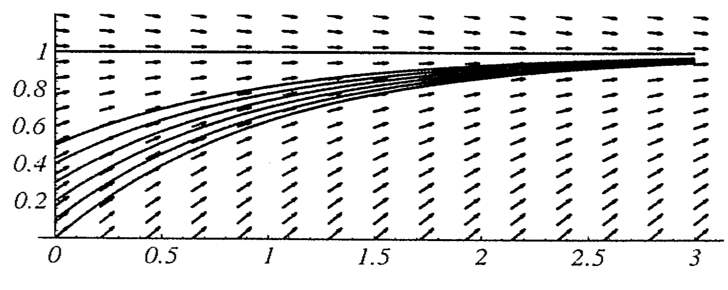
8.6.1. Korlátozott növekedés

Semmilyen organizmus vagy populáció nem növekedhet korlátlanul. Korlátozást jelent az élelem hiánya, a szűk lakóterület stb.

Tegyük fel, hogy az egyedek száma ($x(t)$) nem haladhatja meg a B értéket, de $x(t)$ aszimptotikusan megközelítheti B-t. B közelében a növekedés egyre kisebb és kisebb. A növekedés arányos a $(B - x)$ különbséggel. Egy ilyen növekedési folyamatot az

$$x' = k(B - x)$$

egyenlet ír le ($k > 0$), amelynek általános megoldása $x(t, x_0) = (x_0 - B)e^{-kt} + B$. Az alkalmazás szempontjából csak az $0 \le x(t) \le B$ és $0 \le x_0 \le B$ esetekben van a megoldásoknak értelme. A $B = 1$, $k = 1$ esetet látjuk az alábbi ábrán.



8.6.2. Születési folyamat lehalászással

Tegyük fel, hogy az $x' = \lambda x$ törvény szerint szaporodó népességből μ sebességű kivándorlás vagy lehalászás történik, megakadályozandó a túlnépesedést. Ekkor a populáció létszámát az

$$x' = \lambda x - \mu$$

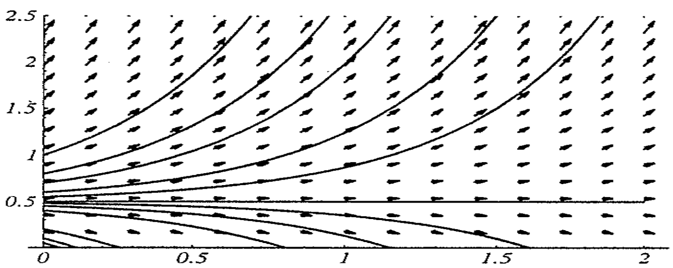
egyenlet írja le, ahol $\lambda > 0$ a szaporodási ráta, $\mu > 0$ a csökkenés sebessége. Az egyenlet egyensúlyi helyzete $\gamma = \mu/\lambda$. Az egyenlet megoldásának elemzésével könnyen látható, hogy ha a populáció kezdeti népessége nagyobb, mint γ, akkor a népesség az egyenletes lehalászás, kivándorlás ellenére növekszik. Azonban, ha a népesség száma kisebb, mint γ, akkor a populáció véges T idő alatt kihal. Ezt az időt könnyen kiszámíthatjuk a megoldások képletének ismeretében. Legyen $0 < x_0 < \gamma$. A 8.6. pontban, az általános megoldásra adott formulát felhasználva az

$$x(T, x_0) = \Big(x_0 - \gamma\Big)e^{aT} + \gamma = 0$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$T = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\gamma}{\gamma - x_0}\right).$$

Az ábrán az $x' = 2x - 1$ egyenlet megoldásait látjuk.

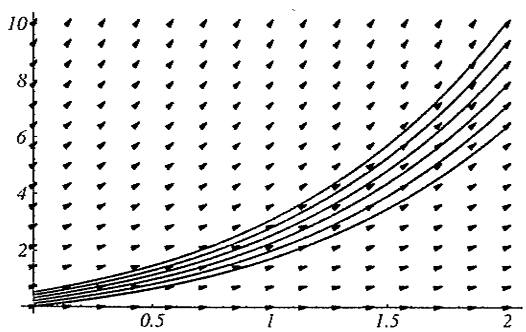


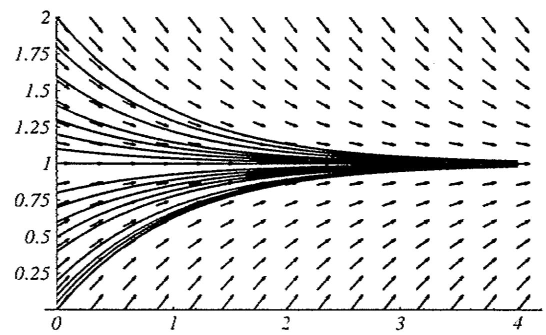
8.6.3. Születési és bevándorlási folyamat

A $x' = \lambda x$ szerint szaporodó populációba érkezzenek bevándorlók állandó sebességgel, (a bevándorlási ráta μ, az egységnyi idő alatt érkezett bevándorlók száma). Ekkor a populáció népességének változása az

$$x' = \lambda x + \mu$$

egyenlettel írható le ($\lambda > 0$, $\mu > 0$). A baloldali ábrán a $\lambda = 1, \mu = 1$ eset megoldásait láthatjuk.





Ha $\lambda < 0$, akkor a populáció halálozási rátája nagyobb, mint a születési, akkor a létszámot csak a $-\lambda x$ mértékű csökkenést ellensúlyozó bevándorlás képes fenntartani. Ennek az esetnek a vizsgálatát az előző pont alapján az olvasóra bízzuk. Segítséget adhat a munkához jobboldali ábra, amely a $\lambda = -1, \mu = 1$ esetet mutatja.

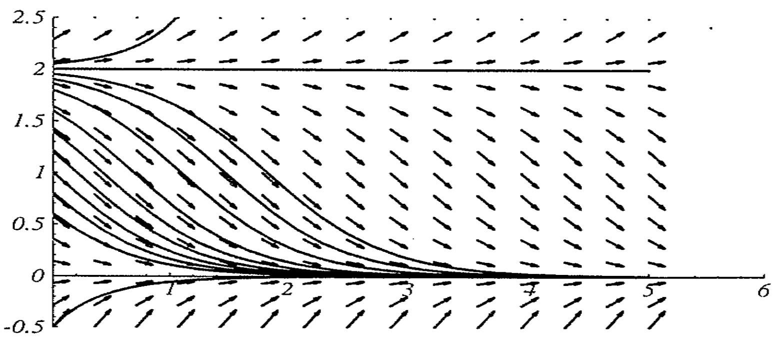
8.7. Az $x' = a(A-x)(B-x)$ differenciálegyenlet

Az előző pontokban vizsgált egyenletben x, x' legfeljebb első hatványon szerepel. Ezek az egyenletek lineárisak. Ezzel szemben az

$$x' = a(A-x)(B-x)$$

egyenletben x második hatványa is szerepel. Ez egy nemlineáris egyenlet.

Ha $A \neq B$, az egyenletnek két egyensúlyi helyzete van: $x(t) = A$, $x(t) = B$. Ezeken a helyeken $x' = 0$. Az alábbi ábra mutatja ($a = 1$, $A = 0$, $B = 2$), hogy a megoldások nem metszhetik át az $x(t) = A$ és $x(t) = B$ egyensúlyi helyzeteket.



Az egyenlet megoldását a korábbiakhoz hasonlóan végezzük:

$$\frac{x'}{(A-x)(B-x)} = a,$$

innen

$$\int \frac{x'}{(A-x)(B-x)}dt = \int adt = at + c.$$

A baloldal integrálásához némi átalakításra van szükségünk.

$$\frac{1}{(A-x)(B-x)} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{x-B} - \frac{1}{x-A}\right)$$

Ezt már tudjuk integrálni. Az $x = x(t)$, $dx = x'dt$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int \frac{x'}{(A-x)(B-x)}dt &= \frac{1}{B-A}\left(\int \frac{dx}{x-B} - \int \frac{dx}{x-A}\right) = \\ &= \frac{1}{B-A}\ln\left|\frac{x-B}{x-A}\right|,\end{aligned}$$

ezért

$$\ln\left|\frac{x-B}{x-A}\right| = (B-A)(at+c),$$

és

$$\frac{x-B}{x-A} = Ce^{(B-A)at},$$

ahol C-re kapjuk, hogy ($t_0 = 0$, $x(0) = x_0$)

$$C = \frac{x_0 - B}{x_0 - A}.$$

Innen $x(t)$ kifejezhető, és

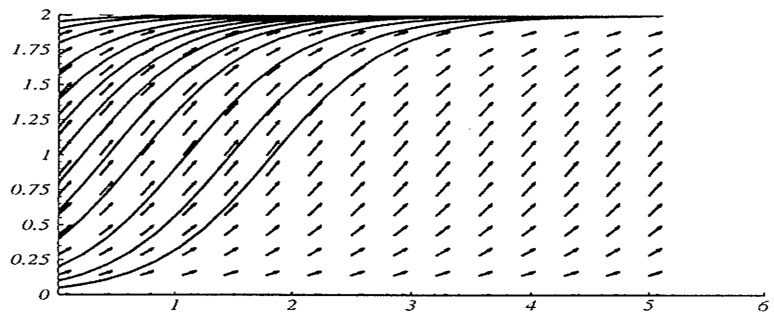
$$x(t, x_0) = A + \frac{B-A}{1 - Ce^{(B-A)at}}.$$

8.7.1. Korlátozott növekedési folyamat

Már vizsgáltunk egyszerű szaporodási, növekedési folyamatokat. *Tegyük fel most, hogy a létszámarányos (méretarányos) növekedést ($a \cdot x$) korlátozó feltételek is befolyásolják (($B - x$),* ahol B a maximális létszám vagy méret). Ha a populáció kicsi, és nem tölti ki a teret, a korlátozó feltételek nem hatnak, akkor az $a \cdot x$ rész domináns, ha pedig x közeledik B-hez, akkor az egyedek közül (bár a szaporodás most is létszámarányos) sok elpusztul, mert a környezet nem bírja eltartani a megszaporodott népességet. Ezért ezt a folyamatot az

$$x' = ax(B - x)$$

alakú egyenlettel lehet modellezni. A megoldások menete elképzeléseinkkel összhangban van.



A megoldások képletét az $x' = a(A - x)(B - x)$ egyenlet megoldásaira nyert általános formulából kapjuk:

$$x(t, x_0) = \frac{B}{1 + \frac{B - x_0}{x_0} e^{Bat}},$$

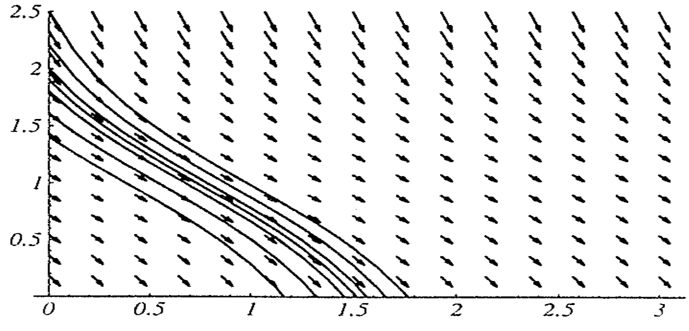
ahol $x(0) = x_0$ a populáció létszáma a $t_0 = 0$ pillanatban.

8.7.2. Korlátozott növekedés lehalászással

A fenti nemlineáris modellbe is beépíthetünk népességszabályozó mechanizmusokat. Tekintsük a népességcsökkentés, a lehalászás esetét. Ekkor a folyamatot leíró egyenlet

$$x' = ax(B - x) - b \qquad (a, B, b > 0).$$

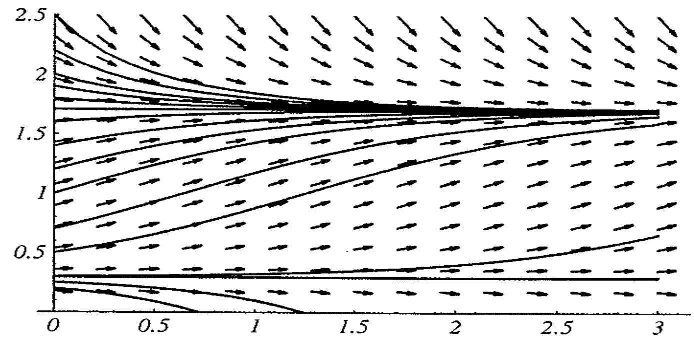
Keressük meg az egyensúlyi helyzeteket, azaz az $ax(B-x)-b = 0$ egyenlet megoldásait. Az ábra mutatja (a=1, B=2, b=2), hogy ha $\sqrt{\frac{B^2}{2} - \frac{b}{a}} \leq 0$, akkor nincs egyensúlyi helyzet, és bármely pozitív kezdeti népesség esetén a populáció kihal. A lehalászás mértéke túl nagy a szaporodási rátához és az ideális maximális népességhez képest.



Ha $\sqrt{\frac{B^2}{2}-\frac{b}{a}} \geq 0$, akkor az egyensúlyi helyzetek:

$$\beta_1 = \frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{2}-\frac{b}{a}}, \quad \beta_2 = \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{2}-\frac{b}{a}}.$$

A lehalászással most is óvatosnak kell lennünk. Ugyanis, ha a népesség száma kisebb, mint β_1, akkor is kihal a populáció véges idő alatt. Ekkor a szabályozási folyamatot le kell állítani vagy módosítani kell. Az ábrán az $a = 1, B = 2, b = 0.5$ eset megoldásait láthatjuk.



Megjegyezzük, hogy az egyenlet $x' = a(x-\beta_1)(x-\beta_2)$ alakban írható, ezért megoldásait ismerjük. Így a kihalás várható ideje kiszámítható. A $\beta_1 = \beta_2$ eset megoldásával a 8.8. pontban foglalkozunk.

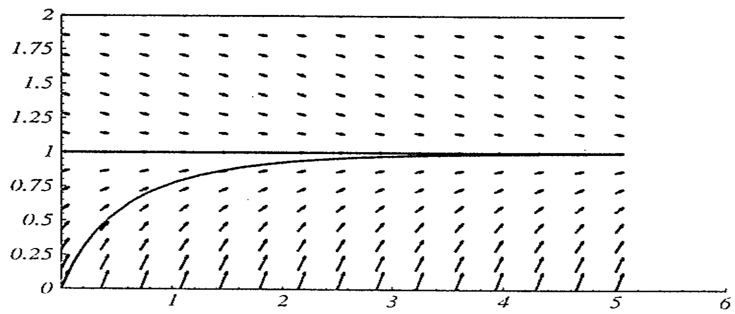
8.7.3. Kémiai reakciók

Tekintsünk két egymással reagáló kémiai anyagot. A reakció során egy harmadik anyag keletkezik. Valamilyen homogén mértékegységet véve legyen az egyik anyag kezdeti mennyisége A, a másiké B. A keletkezett anyag mennyisége a reakció során változik, legyen ez $x(t)$.

A reagáló vegyületek mennyisége a t pillanatban $A-x$, illetve $B-x$ a megfelelő mértékegységeket véve (annyi anyag fogy, amennyi keletkezik). A reakció sebessége $x'(t)$. A kémiában ismert, hogy katalizátor nélkül a reakciósebesség arányos az egymással reagáló anyagok mennyiségével. Ezért az

$$x'(t) = a(A-x)(B-x)$$

egyenlet írja le a vázolt reakciót. Ezt az egyenletet *másodfokú kémiai reakcióegyenletnek* nevezzük. A keletkezett anyag mennyisége $0 \leq x(t) < A, B$. Ha elérné valamelyik reagens mennyiségét, akkor a reakció megállna. Az alábbi ábrán az $x' = (1-x)(2-x)$, $\quad x(0) = 0$ kezdetiérték probléma (kezdetben még nincs termék) megoldását láthatjuk:



Ha egyik reagens, például az első, olyan nagy mennyiségben van jelen, hogy csökkenése elhanyagolható (pl. a levegő oxigénje), akkor az $(A - x)$ tényező konstansnak tekinthető, így az egyenlet az előző pontban tárgyalt

$$x' = a(B - x)$$

egyenletre redukálódik, amelyet az *elsőfokú kémiai reakciók egyenletének* is neveznek. Ha a második tényező csökkenése is elhanyagolható, akkor az

$$x' = a$$

egyenlethez jutunk, amely a *nullarendű reakciók egyenlete.*

Az egyenletet továbbfejleszthetjük. Ha a reakciót katalizátor vagy egyéb hatás befolyásolja, akkor a

$$x' = a(A - x)(B - x) + f(x)$$

vagy

$$x' = a(A - x)(B - x) + g(t)$$

egyenleteket kaphatjuk. Az első esetben a külső hatás a keletkezett anyag mennyiségétől függ (pl. növekedés esetén láncszerű gerjesztés). A második esetben a külső hatás az időtől függ, ami lehet melegítés, keverés vagy valamilyen más behatás.

8.8. Az $x' = a(A - x)^2$ egyenlet

Az

$$x' = a(A - x)^2$$

egyenlet az előző pontban tárgyalt eset speciális eseteként tekinthető ($B = A$), azonban látni fogjuk, hogy viselkedése attól teljesen eltér. Az egyetlen konstans megoldás az $x(t) = A$, egyébként $x(t)$ önmaga négyzetével arányosan nő (a derivált pozitív, ezért a megoldások növőek), ami $x > A$ esetén gyorsabb az exponenciális növekedésnél.

Speciálisan az $A = 0$ esetben az egyenlet

$$x' = ax^2$$

alakú, ami olyan szaporodási folyamatot modellezhet, ahol minden egyed minden egyeddel párosodik, és a szaporodás azonnal be is következik. Meg fogjuk mutatni, hogy ez a szaporodási törvény a populáció véges idő alatti szétrobbanásához vezet. A korábbi modellekben ilyet nem tapasztaltunk.

Ezek után oldjuk meg az

$$x' = a(A - x)^2$$

egyenletet. Ha $x \neq A$, akkor

$$\frac{x'}{(A - x)^2} = a,$$

ahonnan a korábbiakhoz hasonlóan

$$\int \frac{dx}{(A - x)^2} = at + c,$$

$$\frac{1}{A - x} = at + c.$$

Ha $x(0) = x_0$, akkor

$$\frac{1}{A - x_0} = c.$$

Az egyenletből x-et kifejezve kapjuk

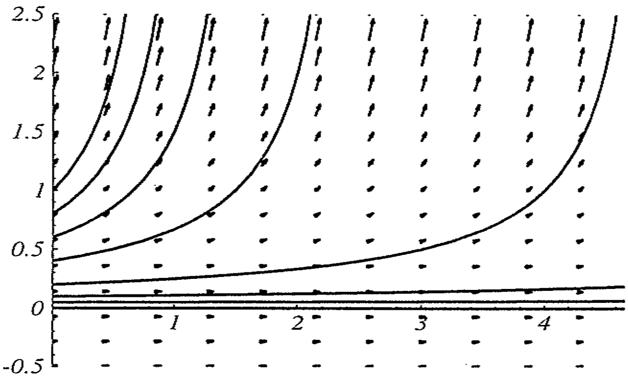
$$x - A = -\frac{1}{at + c}$$

$$x(t) = A - \frac{1}{at + \frac{1}{A-x_0}} = A + \frac{x_0 - A}{a(A - x_0)t + 1}.$$

Látható, hogy $x(t)$ nincs értelmezve a

$$T = \frac{1}{a(x_0 - A)}$$

pillanatban, ami azt jelenti, hogy ha $a > 0$; $x_0 > A$, akkor a populáció tagjainak száma T idő múlva végtelenné válik. Az $a = 1$, $A = 0$ esetben mutatjuk a megoldásokat az alábbi ábrán.



8.9. Általánosítások, nemautonóm egyenletek, szétválasztható egyenletek

Az eddig vizsgált egyenletek jobboldalán a t időváltozó nem szerepelt, autonóm egyenletek voltak. Előfordul azonban, hogy a rendszer nem autonóm. Ekkor az együtthatók nem konstansok, az egyenlet jobboldala explicit módon függ az időtől. Például az

$$x' = ax$$

egyenlet helyett vehetjük az

$$x' = a(t)x$$

egyenletet, ahol az $a(t)$ időfüggésének oka lehet születésszabályozási rendelet, járvány vagy bármilyen közvetlen beavatkozás a folyamatba.

Az

$$x' = a(t)x + b(t)$$

egyenletben a $b(t)$ függvény lehet időtől függő bevándorlási ráta, népességszabályozás, változó sebességű infúzió stb.

A nemautonóm egyenletek megoldása, a megoldások vizsgálata általában nehezebb. Egyszerűbb esetek azonban könnyen kezelhetők. Például, az

$$x' = a(t)x$$

egyenlet megoldása

$$\int \frac{x'}{x} dt = \int \frac{dx}{x} = \int a(s)ds + c$$

$$\ln|x| = \int a(s)ds + c.$$

Némi meggondolás után

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Vegyük észre, hogy az egyenletek megoldására mindig ugyanazt az egyszerű módszert használtuk. Kihasználtuk azt az egyszerű tényt, hogy az egyenlet jobboldala egy x-től és egy t-től függő tényező szorzata. Ez a módszer általában is alkalmazható az úgynevezett *szétválasztható változójú* egyenletekre, amelyek

$$x' = f(x) \cdot g(t)$$

alakúak. Ha $f(x) = 0$, akkor ennek az egyenletnek a megoldásai a differenciálegyenletnek is megoldásai, hiszen a derivált ezeken a helyeken zéró. Ha $f(x) \neq 0$, akkor

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t),$$

ezért integrálva az egyenletet ($x = x(t)$, $dx = x'dt$), az

$$\int \frac{x'}{f(x)}dt = \int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt$$

egyenlőséget kapjuk. Az

$$\int \frac{dx}{f(x)}, \qquad \int g(t)dt$$

integrálások elvégzése után $x(t)$-re egy egyenletet kapunk, amely egy határozatlan konstanst is tartalmaz. Ez a konstans az $x_0 = x(t_0)$ kezdeti feltételből meghatározható. Az egyenletet megoldva (ha megoldható!) kapjuk az $x(t)$ megoldást.

A fenti módszert nevezzük a változók szétválasztása módszerének. Néhány esetben az (x, t) változókra alkalmazott transzformációkkal visszavezethetjük az egyenletet szétválasztható változójúra. Ezekkel itt nem foglalkozunk.

8.10. Magasabb rendű egyenletek, lineáris egyenletek megoldása

A Newton törvény miatt az $x(t), x'(t)$ és $x''(t)$ is szerepel a mozgásokat leíró egyenletekben. Ezek egy általánosabb alakja

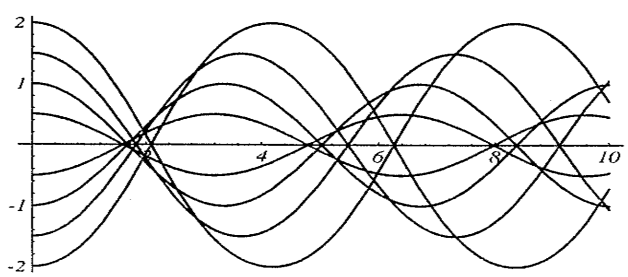
$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)).$$

Az egyenletben a második derivált explicit módon ki van fejezve. Ez egy másodrendű differenciálegyenlet.

Általában, n-edrendű differenciálegyenletről beszélünk, ha az egyenlet összefüggést tartalmaz $t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots$ és $x^{(n)}(t)$ között. A másodrendű egyenletnél kezdeti feltételt kell adni $x(t)$-re és $x'(t)$-re, az n-ed rendűnél pedig az $x(t)$, $x'(t), \ldots x^{(n-1)}(t)$ függvényekre. Ezek az egyenletek is lehetnek lineárisak vagy nemlineárisak. Az inga mozgását leíró

$$x'' + \sin x = 0$$

egyenlet nemlineáris. Ennek megoldásait mutatja az alábbi ábra:



Felhasználva a differenciálható függvények lineáris közelítését (3.6. fejezet), a fenti másodrendű egyenlet jobboldalán levő nemlineáris függvényt helyettesíthetjük az érintőjével az $x = 0$

egyensúlyi helyzet környezetében. Az $x'' = -x$ egyenletet kapjuk. Ez általában is megtehető. Ezért van kiemelt jelentőségük a lineáris egyenleteknek, a fizikai alkalmazásokban a lináris mésodrendű egyenleteknek.

A továbbiakban a másodrendű, konstans együtthatós, lineáris

$$x" + bx' + cx = 0$$

egyenlet megoldásának módszerét vázoljuk. Az állításokat nem bizonyítjuk, utólagos differenciálással ellenőrizhetők. Az elsőrendű lineáris $x' = ax$ egyenlethez hasonlóan, keressük a megoldásokat $x(t) = e^{\lambda t}$ alakú exponenciális függvény alakjában. Ezt a függvényt a differenciálegyenletbe helyettesítve kapjuk az

$$x(t) = e^{\lambda t}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

egyenletet. Eszerint, az $e^{\lambda t}$ függvény akkor és csakis akkor megoldása az egyenletnek, ha λ kielégíti az

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

úgynevezett **karakterisztikus egyenletet**.

1. eset. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van ($b^2 - 4c > 0$). Legyenek

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Ekkor az egyenletnek megoldásai az $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ függvények, és bármely megoldás

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t},$$

alakú, ahol a_1 és a_2 a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

2. eset. Tegyük fel, hogy $b^2 - 4c = 0$. A karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van, $\lambda_0 = \frac{-b}{2}$.

Ekkor $e^{\lambda_0 t}$ és $te^{\lambda_0 t}$ megoldások, bármely megoldás pedig

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_0 t} + a_2 t e^{\lambda_0 t}$$

alakban írható, ahol a_1 és a_2 a kezdeti feltételekből határozhatók meg.

3. eset. Végül legyen $b^2 - 4c < 0$. A karakterisztikus egyenletnek nincs valós megoldása. Ekkor a $\lambda_0 = -\frac{b}{2}$ és $\mu = \sqrt{4c - b^2}$ jelöléssel élve, az $e^{\lambda_0 t} \cdot \sin \mu t$ és az $e^{\lambda_0 t} \cos \mu t$ függvények megoldások. Minden megoldás pedig

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_0 t} \cdot \sin \mu t + a_2 e^{\lambda_0 t} \cos \mu t$$

alakban írható, ahol az a_1 és a_2 konstansok a kezdeti feltételekből határozhatók meg. A fizikusok gyakran használják az

$$x(t) = Ae^{\lambda_0 t} \sin(\mu t + \varphi)$$

formát, ahol A az amplitúdó, φ pedig a kezdeti fázisszög. Az elnevezések a harmonikus rezgésnél és az ingamozgásnál használatos elnevezésekből maradtak meg.

8.3. Példa. Tekintsük példaként a harmonikus rezgőmozgás

$$x" + k^2 x = 0$$

egyenletét, ahol k^2 a rugalmassági együttható. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

aminek nincs valós gyöke. Innen $\lambda_0 = 0$, $\mu = k$. Ezért az általános megoldás

$$x(t) = A \sin(kt + \varphi)$$

alakú.

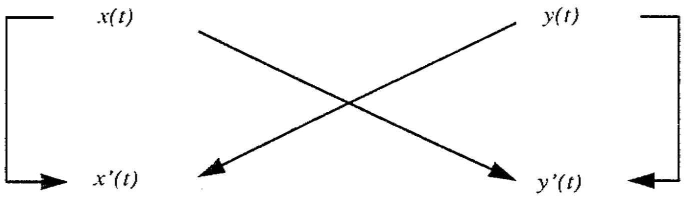
8.11. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

A síkbeli, térbeli mozgások során, illetve mindenütt, ahol több folyamat változását, egymásra hatását vizsgáljuk, mindegyik változóra differenciálegyenletet, együttesen differenciálegyenlet-rendszert nyerünk. Két folyamat $(x(t), y(t))$ esetén egy eléggé általános alakú az

$$x'(t) = f(t, x(t), y(t)),$$

$$y'(t) = g(t, x(t), y(t))$$

rendszer. Látható, hogy az $x(t)$ változóra az $y(t)$, és az $y(t)$ változóra az $x(t)$ is hatással van.



Az $x(t)$, $y(t)$ komponenseket külön-külön ábrázolhatjuk a (t, x), (t, y) koordinátarendszerekben vagy együtt a (t, x, y) térbeli koordinátarendszerben. Ugyanitt képezhetjük az egyenletrendszerhez tartozó $\{(1, f(t, x, y), g(t, x, y))\}$ iránymezőt is.

Ha a rendszer autonóm (a jobboldal nem függ t-től)

$$x' = f(x, y)$$

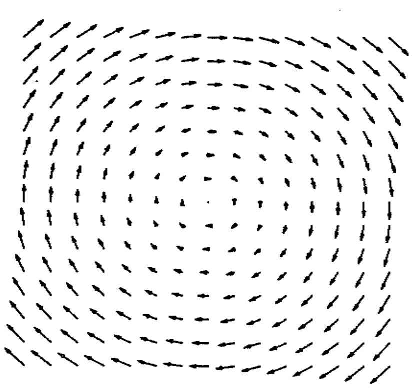
$$y' = g(x, y)$$

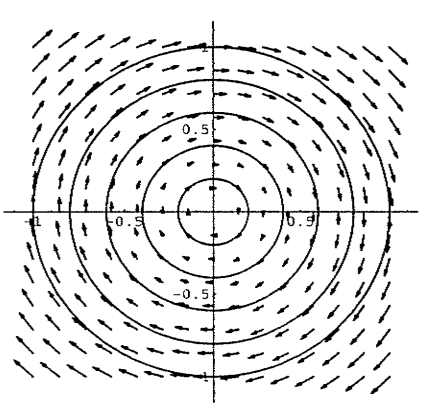
akkor a *megoldásokat ábrázolhatjuk az* (x, y) **fázissíkon**. Az így kapott $(x(t), y(t))$ görbéket **fázisgörbéknek** nevezzük.

Minden $(x(t), y(t))$ pontban a mozgás irányát és sebességét az $(x'(t), y'(t))$ sebességvektor mutatja. A fázissík tetszőleges (x, y) pontjára a sebességvektor az egyenlet szerint $(f(x, y), g(x, y))$, így ezeket a megoldások ismerete nélkül is felrajzolhatjuk. Ezt minden ponthoz megtéve, **vektormezőhöz** *jutunk.* Az

$$x' = y, \quad y' = -x$$

rendszerhez tartozó vektormezőt láthatjuk a baloldali ábrán.





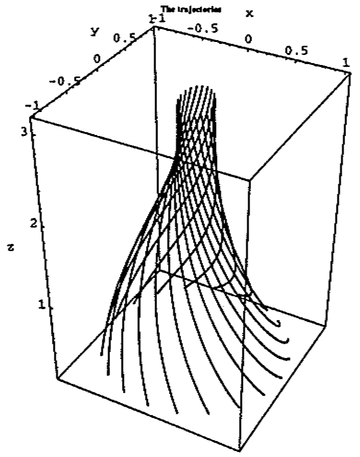
Az autonóm differenciálegyenlet–rendszer megoldása a fázissíkon az egyenlethez tartozó vektormezőhöz simuló görbék (nem feltétlenül $y = y(x)$ függvények grafikonjai) keresését jelenti. A fenti egyenlet megoldásainak fázisgörbéit a jobboldali ábrán láthatjuk.

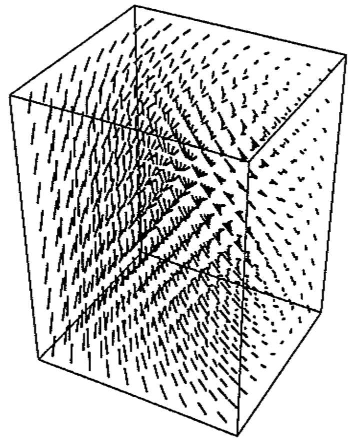
Megjegyezzük, hogy a fentiek alkalmazhatók a térbeli $(x(t), y(t), z(t))$ mozgások egyenletrendszereire és általánosabb rendszerekre is. Ott a fázisgörbék egy térbeli vektormezőhöz simulnak.

Az

$$x'(t) = y, \quad y'(t) = -y - x, \quad z'(t) = 1$$

egyenletrendszer néhány megoldásának fázisgörbéjét és vektormezőjét mutatják az alábbi ábrák.





A legegyszerűbb lineáris

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

differenciálegyenlet–rendszernek számos gyakorlati alkalmazása van. A továbbiakban csak ezzel az egyenlettel foglalkozunk.

Mindenekelőtt vázoljuk a megoldás módszerét. Ez hasonló az előző pontban tárgyalt másodrendű lineáris egyenlet megoldásának módszeréhez. Az állításokat most sem bizonyítjuk, utólagos differenciálással ellenőrizhetők. A megoldásokat exponenciális függvény alakjában keressük: $x(t) = pe^{\lambda t}$, $y(t) = qe^{\lambda t}$. A differenciálegyenlet–rendszerbe helyettesítve, valamint p-t és q-t kifejezve, λ-ra most az alábbi

$$(a - \lambda)(d - \lambda) = bc,$$
$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk. Legyen $D = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$ az egyenlet diszkriminánsa.

1. eset. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus egyenletnek két valós λ_1, λ_2 megoldása van $(D > 0)$. Ekkor a megoldások

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t}$$
$$y(t) = A_2 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}$$

alakúak, ahol (A_1, B_1) és (A_2, B_2) a kezdeti feltételekből, illetve a differenciálegyenlet–rendszerbe való behelyettesítéssel határozhatók meg.

2. eset. Ha $D = 0$, és egy valós gyök van (λ_0), akkor a megoldások

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_0 t} + B_1 t \cdot e^{\lambda_0 t}$$
$$y(t) = A_2 e^{\lambda_0 t} + B_2 t e^{\lambda_0 t}$$

alakúak. Az együtthatók meghatározása a fentiekkel azonos módszerrel történik.

3. eset. Ha $D < 0$, akkor legyen $\mu = \sqrt{-D}$. Most a megoldások általános alakja

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_0 t} \sin \mu t + B_1 e^{\lambda_0 t} \cos \mu t = C_1 e^{\lambda_0 t} \sin(\mu t - \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 e^{\lambda_0 t} \sin \mu t + B_2 e^{\lambda_0 t} \cos \mu t = C_2 e^{\lambda_0 t} \sin(\mu t - \varphi_2)$$

Az együtthatók meghatározásának módszere a korábbiakkal azonos.

8.4. Példa. Oldjuk meg az

$$x' = x + y, \quad y' = x - y$$

differenciálegyenlet-rendszert. A karakterisztikus egyenlet és megoldásai:

$$\lambda^2 - 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

A megoldások általános alakja

$$x(t) = A_1 e^{\sqrt{2}t} + B_1 e^{-\sqrt{2}t}, \qquad y(t) = A_2 e^{\sqrt{2}t} + B_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

Keressük az $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást:

$$1 = A_1 + B_1,$$

$$-1 = A_2 + B_2.$$

Az egyenletbe helyettesítve, és a $t = 0$ pillanatot véve

$$A_1\sqrt{2} - B_1\sqrt{2} = A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = 0,$$

$$A_2\sqrt{2} - B_2\sqrt{2} = A_1 + B_1 - (A_2 + B_2) = 2.$$

Innen

$$A_1 + B_1 = 1, \quad A_1 - B_1 = 0,$$

$$A_2 + B_2 = -1, \quad A_2 - B_2 = \sqrt{2}.$$

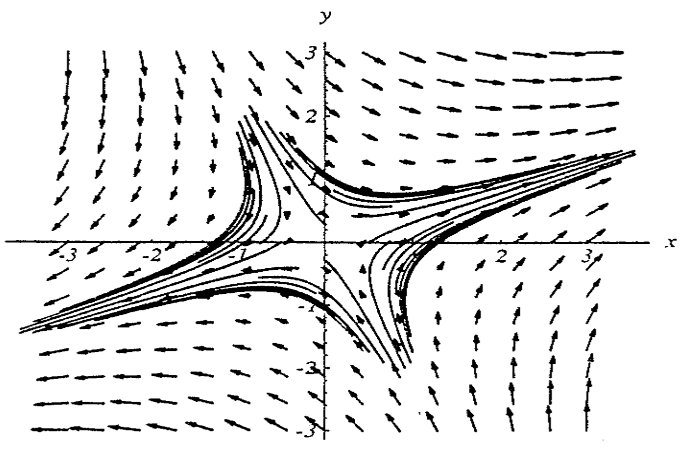
Oldjuk meg a fenti egyenletrendszereket:

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, \qquad B_2 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}.$$

Az adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldás tehát

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}\right), \quad y(t) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} e^{\sqrt{2}t} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}t}.$$

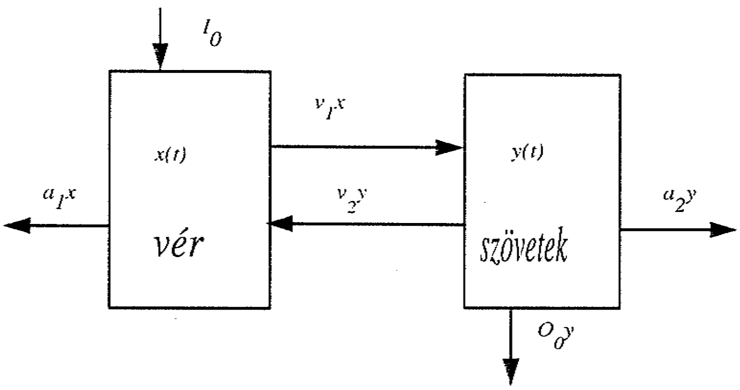
E rendszerhez tartozó vektormezőt és néhány fázisgörbét láthatunk az alábbi ábrákon.



8.11.1. Egy gyógyszerfelszívódási modell

A vér áramlik a szervezetben az érrendszer, a szövetek és szervek között. Valamely gyógyszert a szervezetbe beadva (intravénásan a vérbe, injekcióval a szövetekbe), a felszívódást, lebomlást és kiürülést vizsgáljuk a vérben és a szövetekben. Egy egyszerűsített sémát tekintünk. A gyógyszer a vérből a szövetekbe és szervekbe v_1 relatív sebességgel kerül át (felszívódik), ugyanakkor, van egy v_2 fordított irányú mozgás is. A gyógyszer a veséből kiürül O_0 relatív sebességgel. A vérben és a szövetekben a gyógyszer lebomlik a_1, a_2 relatív sebességgel. A relatív sebesség az egységnyi mennyiséghez viszonyított sebességet jelenti. Mindegyik lebomlási, áramlási folyamat a gyógyszer adott pillanatbeli mennyiségével arányos. Legyen a gyógyszer mennyisége a vérben $x(t)$, a szövetekben $y(t)$.

Rendszerünket grafikusan is ábrázolhatjuk.



Az I_0 áram (külső input) folyamatos adagolást, infúziót jelent. Ez független a már eddig beadott gyógyszer mennyiségétől. Az $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ a gyógyszer beadásának pillanatában levő mennyiség (dózis), feltéve, hogy az elterjedés az adott részben (vér,szövetek) azonnali.

A fentiek szerint

$$x'(t) = -a_1x - v_1x + v_2y + I_0,$$

$$y'(t) = -a_2y - v_2y + v_1x - O_0y.$$

Az $I_0 = 0$ esetben a fent tárgyalt egyenletre jutottunk. Ha $I_0 \neq 0$, az egyenlet akkor is könnyen megoldható. A megoldási módszert lásd például L. Sz. Pontrjagin könyvében ([8]).

Az egyenletrendszer együtthatóit kísérleti eredményekből határozhatjuk meg oly módon, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldásait (amelyek függnek az áramlási paraméterektől) a legkisebb négyzetek módszerével illesztjük a mért adatsorozatokhoz. A lineáris regresszió két paraméterével szemben itt több paraméterre vonatkozó minimalizálást kell végezni (lásd a 7.3. fejezetet). Ezekkel a feladatokkal itt részleteiben nem foglalkozunk.

Az olyan rendszereket, ahol különböző rekeszek közötti anyagáramlást vizsgáljuk, **rekesz- vagy kompartment rendszereknek** *nevezzük.* Ezen rendszerek matematikai vizsgálata lökést adott a gyógyszerhatástani, az ér- és nyirokrendszer működésének modellezésére irányuló kutatásoknak.