ahol $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$.

5.9. Példa.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

ahol $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$.

5.10. Példa.

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + c = \ln|e^x + 1| + c,$$

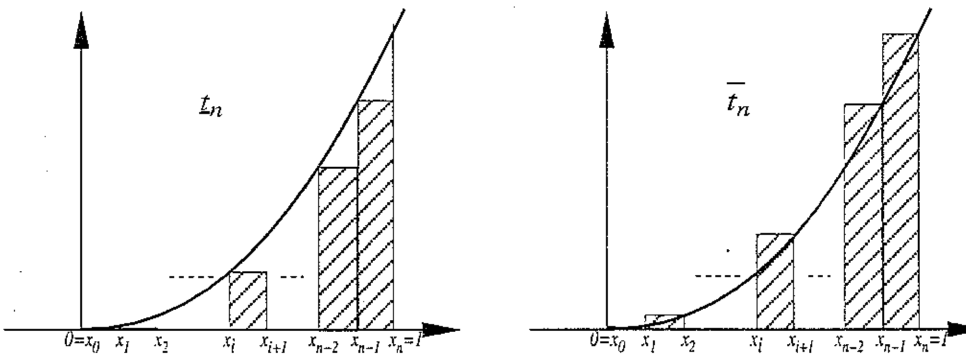
ahol $y = e^x + 1$ $dy = e^x dx$.

A példákban előforduló tipikus eseteket írjuk fel általános formában:

$$\begin{aligned}
\int \left(f(x)\right)^n f'(x) dx &= \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + c \\
\int f(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \int f(y) dy \quad (y = ax + b,\ dy = a \cdot dx)
\end{aligned}$$

6. A határozott integrál

A határérték fogalmának bevezetésénél a 2.1.2. pontban kiszámítottuk az $f(x) = x^2$ függvény és az x-tengely közti tartomány területét a $[0, 1]$ intervallumon, oly módon, hogy a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre osztottuk, és a vizsgált tartomány területét alulról illetve felülről becsültük az ábrán látható téglalapok területének összegével, majd ezek határértékét vettük.



Hasonló gondolatmenetet követhetünk tetszőleges nemnegatív folytonos $f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely közti terület kiszámítása során is. Ha a függvény negatív, és a terület nagyságára van szükségünk, akkor a függvényértékek abszolút értékét kell vennünk. A következő pontban azonban látni fogjuk, hogy jobban kezelhető fogalomhoz jutunk, ha a területet negatívnak vesszük negatív függvény esetén.

A fogalmak pontos tárgyalása előtt, következő pontban a területszámítástól látszólag független problémát vázolunk. Valamely függvény és deriváltja közti kapcsolatot tekintjük egy új módszerrel. Mint látni fogjuk ez is területszámítási problémára vezet.

6.1. A függvény változásának előállítása deriváltjából

A határozatlan integrált használva formális, technikai okoskodásokkal próbáltunk valamely függvényt deriváltja ismeretében megkeresni. Ez nem mindig lehetséges. Most közelítő eljárásokkal kísérletezünk.

Emlékezzünk rá, hogy ha x_0, $F'(x_0)$ adottak, és x elég közel van x_0-hoz, akkor $F(x)-F(x_0) \approx F'(x_0)(x-x_0)$, ahol a jobboldal az x_0-beli érintő értéke az x_0-hoz közeli x-ben. Ezt felhasználva, becsüljük az $F(x)$ függvény változását az $[a,b]$ intervallumon.

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot "elegendően rövid" részintervallumokra, például osszuk fel $[a,b]$-t n egyenlő részre. A részintervallumokon a függvényt valamely érintőjével fogjuk helyettesíteni. Legyen $h=(b-a)/n$, és vezessük be az

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= x_0 + h \\ x_i &= x_0 + i \cdot h \\ x_n &= x_0 + n \cdot h = b \end{aligned}$$

jelöléseket. Ekkor $F(x_{i+1}) - F(x_i) \approx F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = F'(x_i)h$, és

$$F(b) - F(a) =$$
$$= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \ldots + (F(x_1) - F(x_0)) = \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i).$$

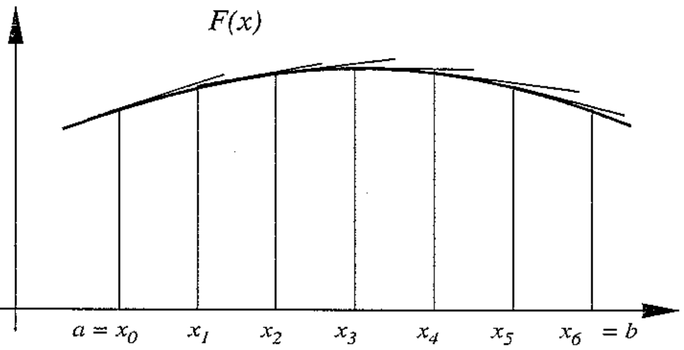
Az összeg minden tagjára alkalmazhatjuk a fenti típusú közelítést. Így

$$F(b) - F(a) \approx \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)h$$

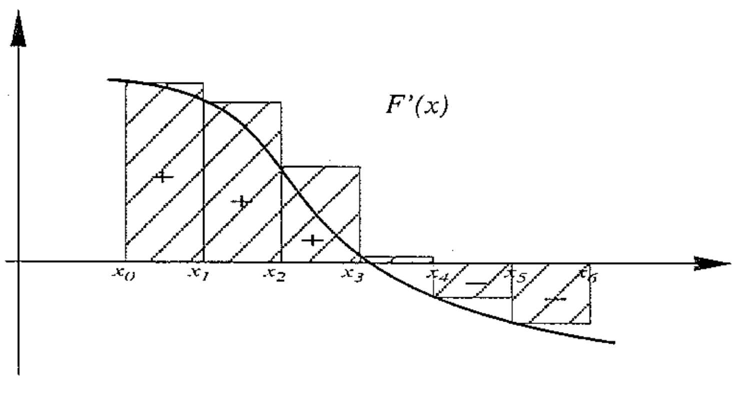
Később be fogjuk látni, hogy ha $F'(x)$ folytonos, akkor n minden határon túli növelésével a közelítés egyenlőségbe megy át, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)h = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

A fenti eljárást nézzük meg grafikusan: Először az $F(x)$ függvény grafikonját képzeljük el:

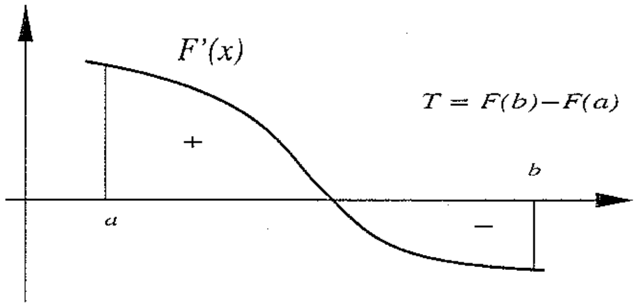


Ugyanez az $F'(x)$ grafikonján:



Látható, hogy $|F'(x_i)|h$ pontosan egy téglalap területe. Az összes ilyen téglalap előjeles területét (az abszolút érték nélkül) összeadva kapjuk, hogy $\sum F'(x_i)h$ az $F'(x)$ függvény és az x tengely közti előjeles terület becslése az $[a, b]$ szakaszon, előjelesen véve. Ui. ha $F'(x_i)$ negatív, a $F'(x_i)h$ is negatív előjelű.

A fenti határérték relációt figyelembe véve kapjuk, hogy ha $n \to \infty$, akkor ez a közelítés az $F'(x)$ és az x tengely közti előjellel vett területet közelíti. Az előjeles terület nagysága $F(b) - F(a)$.

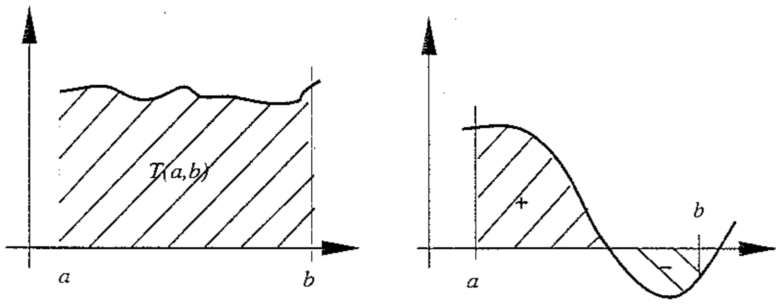


Vegyük észre, hogy eljárásunk alkalmazható akkor is ha a derivált nem formulával, hanem grafikusan adott. Közelítő eredményt kapunk, ha kísérletből származó adatsorozat áll rendelkezésre. Ez a határozatlan integrál technikájával nem volt lehetséges.

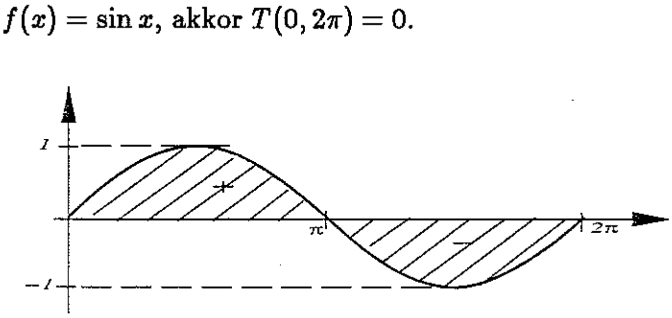
6.2. A határozott integrál definíciója

Bevezető példáink során láttuk, hogy területszámítási problémák és egy differenciálható függvény változásának a derivált ismeretében való előállítása egyaránt valamely függvény grafikonja és az x-tengely közti tartomány területének meghatározásához vezettek. Ebben a pontban matematikailag is megfogalmazzuk a vázolt technikát.

Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon. A bevezető példák során alkalmazott technikát követve, próbáljuk megmérni a kérdéses tartomány $T(a, b)$ előjeles területét, azaz ahol a függvény pozitív, ott a terület is pozitív, ahol a függvény negatív, ott a terület is negatív.



Például, ha $f(x) = \sin x$, akkor $T(0, 2\pi) = 0$.



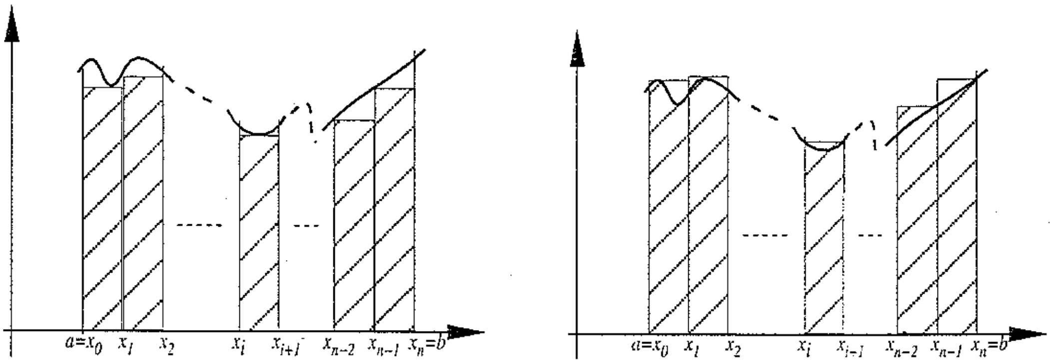
Legyenek $h = (b - a)/n$ (n adott), $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $\dots$, $x_i = a + ih$, $\dots, x_n = b$, és vezessük be az

$$\underline{f_i} = \min_{t \in (x_i, x_{i+1}]} f(t), \qquad \overline{f_i} = \max_{t \in (x_i, x_{i+1}]} f(t)$$

jelöléseket. Közelítsük az $f(x)$ grafikonja és az x-tengely közti tartományt az $[x_i, x_{i+1}]$ alapú és $\underline{f_i}$ magasságú , majd az $\overline{f_i}$ magasságú téglalapok egyesítésével. A

$$\underline{t_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f_i} \cdot h, \qquad \overline{t_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{f_i} \cdot h$$

összegek a tartomány előjeles területének alsó illetve felső közelítését adják.



Belátható, hogy ha $f(x)$ folytonos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \underline{t_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{t_n} = T(a,b).$$

Ez az eljárás általánosabb függvényekre is alkalmazható. Ekkor a fenti összefüggést a $T(a,b)$ definiálására használjuk, feltéve, hogy a két határérték létezik és megegyeznek. Most már bevezethetjük a határozott integrál fogalmát:

6.1. Definíció. *Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a,b]$ intervallumon. Az $f(x)$ $[a,b]$ fölötti határozott integráljának nevezzük a*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{t_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{t_n}$$

közös határértéket, az $f(x)$ függvény $[a,b]$ intervallumon vett grafikonja és az x tengely közötti tartomány előjellel vett területét. Jelölése

$$\int_a^b f(x)dx.$$

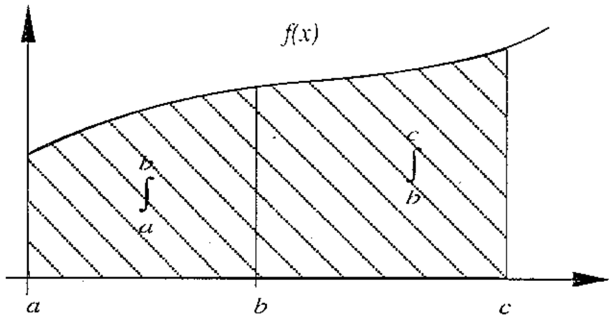
Vegyük észre, hogy a $\underline{t_n}$ összegre a határátmenetet végrehajtva az integrál "végtelen kicsi" téglalapok területének az összege, ahol $f(x)dx$ egy elemi téglalap területe (emlékezzünk a dy/dx jelölésre!!). Az $\int$-jel (elnyújtott S betű (summa)) pedig ezek összegzését jelenti.

6.3. A határozott integrál tulajdonságai

A határozott integrál szemléletes definíciójából azonnal adódik néhány fontos tulajdonsága.

1. tulajdonság. Legyen $a < b < c$, és $f(x)$ folytonos az $[a,c]$ szakaszon. Az alábbi ábra mutatja, hogy

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$



Ha bevezetjük az

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

(a területösszegzést visszafelé végezzük), akkor a fenti egyenlőség tetszőleges a, b, c esetén érvényes. *Ezt a tulajdonságot nevezzük az integrál intervallum szerinti additivitásának.*

2. tulajdonság. Könnyen látható továbbá, hogy

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Az alsó és felső közelítő összegek vizsgálatával is igazolhatjuk, de később egyszerűbben is megmutatjuk az alábbi összefüggéseket:

3. tulajdonság.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

4. tulajdonság. A határozott integrál az integrandus szerint is additív.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

6.4. A határozott integrál becslése, integrálközép

Az alkalmazások során a határozott integrál becslésére az alábbi egyenlőtlenségek igen fontosak. A definícióból azonnal adódik az

5. tulajdonság. Ha $f(x) \geq 0$ és $a \leq b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

és ha $f(x) \leq 0$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

6. tulajdonság. Legyenek $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ és $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Ekkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ugyanis bármely alsó és felső közelítő összegre

$$\begin{aligned} m(b-a) & \leq \sum \underline{f_i}(x_{i+1}-x_i) & = \underline{t_n} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{t_n} = \\ & = \sum \overline{f}_i(x_{i+1}-x_i) & \leq M \sum (x_{i+1}-x_i) = M(b-a). \end{aligned}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Az

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

értéket az $f(x)$ függvény (a,b) intervallumon vett **átlagának, vagy integrálközepének** *nevezzük.*

Ugyanis a $\bar{f}_{[a,b]}$ konstans függvény integrálja $[a,b]$-n ugyanannyi, mint $f(x)$-é. Továbbá, van olyan $a < \varsigma < b$, melyre

$$f(\varsigma) = \bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Megmutatható, hogy ez a fogalom természetes általánosítása a számtani közép fogalmának.

Például, ha $T(t)$ a levegő hőmérsékletét jelenti a t pillanatban,, akkor a napi átlaghőmérsékletet a

$$\frac{1}{24} \int_0^{24} T(t)\, dt$$

integrálközéppel számolhatjuk ki.

Hasonlóan, ha $v(t)$ a test pillanatnyi sebessége, akkor a t_1, t_2 pillanatok között az átlagsebességet az

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

integrálközép adja meg (részletesen lásd a 6.6.2. pontot).

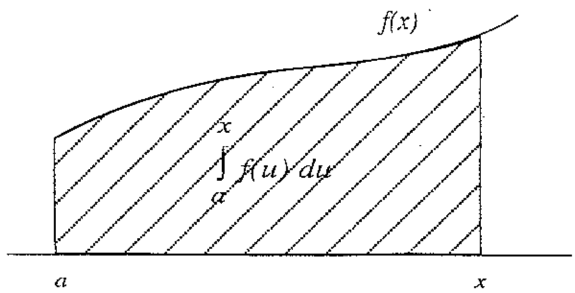
6.5. A területfüggvény és tulajdonságai, az integrálszámítás alaptétele

Most bizonyítjuk a határozott integrál legfontosabb tulajdonságát, melyet az integrálszámítás alaptételének is nevezünk. Ez a tulajdonság kapcsolatot teremt a határozott integrál, a primitív függvény és a differenciálhányados között.

Tekintsük az

$$T(a,x) = \int_a^x f(u)du$$

függvényt. Ezt a függvényt területfüggvénynek, integrálfüggvénynek, vagy felsőhatár függvénynek is szoktuk nevezni, mert az intervallum felső határa változik.



Könnyen látható, hogy

$$T(a,x) = T(a,a_1) + T(a_1,x),$$

vagyis

$$\int_a^x f(u)du = \int_a^{a_1} f(u)du + \int_{a_1}^x f(u)du$$

az integrál intervallum szerinti additivitása miatt. Két területfüggvény csak konstansban különbözik egymástól.

Az előkészületek után bebizonyítjuk az integrálszámítás alaptételét.

6.1. Tétel. *Legyen $f(x)$ folytonos az $x_0 \in (a,b)$ pontban. Ekkor a $T(a,x) = \int_a^x f(u)du$ függvény differenciálható, és differenciálhányadosa az x_0 pontban $f(x_0)$. Ha $f(x)$ minden $x \in (a,b)$-ben folytonos, akkor $T(a,x)$ minden pontban deriválható és*

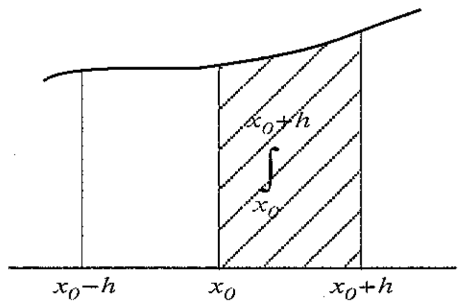
$$\Big(T(a,x)\Big)' = \left(\int_a^x f(u)du\right)' = f(x)$$

Következésképpen, a $T(a,x)$ területfüggvény az $f(x)$ függvénynek primitív függvénye.

A deriválhatóság bizonyítására írjuk fel a $T(a,x)$ differenciahányadosát x_0-ban:

$$\frac{T(a,x_0+h) - T(a,x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

az integrál intervallum szerinti additivitása miatt.



Az integrál becslésére kapott egyenlőtlenségek szerint

$$\min_{t\in[x_0-h,x_0+h]} f(t) \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \le \max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} f(t)$$

ahol a minimum és maximum az $f(x)$ folytonossága miatt létezik (szemlélet alapján elhihető, nem bizonyítjuk), és ismét a folytonosság miatt

$$\lim_{h\to 0}\left(\min_{t\in[x_0-h,x_0+h]} f(t)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} f(t)\right) = f(x_0).$$

A fenti egyenlőtlenségek miatt pedig

$$f(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(\min_{t\in[x_0-h,x_0+h]} f(t)\right) \le \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) \le \lim_{h\to 0}\left(\max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} f(t)\right) = f(x_0).$$

A rendőrelvet (2.9 tétel) alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = f(x_0).$$

Bebizonyítottuk tehát a területfüggvény differenciálhatóságát.

Vegyük észre, hogy a területfüggvény differenciahányadosa, átlagos változása nem más, mint az $f(x)$ függvény integrálközepe az $[x_0, x_0+h]$ intervallumon. Jogos volt tehát, hogy az integrálközepet a függvény átlagának neveztük.

A most alkalmazott bizonyítási eljárást, a rendőrelvet már korábban is alkalmaztuk a $\lim_{x\to 0} \sin x/x$ határérték kiszámításánál. Egy kifejezés határértékét úgy számoljuk ki, hogy egy őt közrefogó kisebb ill. nagyobb kifejezések határértékét keressük. Ha ezek a határértékek megegyeznek, akkor a közrefogott ("őrizetes") kifejezés határértéke is ugyanaz lesz.

A most bebizonyított tétel egy nagyon egyszerű módszert ad a határozott integrál kiszámítására. Vegyünk egy tetszőleges $T(x)$ területfüggvényt. Az integrál intervallum szerinti additivitása miatt az $f(x)$ valamely $[a, b]$ intervallumon vett integrálja

$$\int_a^b f(x)dx = T(b) - T(a)$$

Mivel tételünk szerint $T(x)$ primitív függvénye $f(x)$-nek, ezért ha $F(x)$ egy tetszőleges primitív függvény, akkor $T(x) = F(x) + c$. Innen

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Ezt a szabályt nevezzük **Newton-Leibniz szabálynak.** A határozott integrál kiszámításához az előző fejezet módszereit felhasználva egy primitív függvényt kell keresnünk, és alkalmaznunk a Newton-Leibniz szabályt.

6.1. Példa. Most már könnyedén be tudjuk bizonyítani az

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

egyenlőséget. Legyenek $F(x)$ és $G(x)$ az $f(x)$ és $g(x)$ primitív függvényei. Ekkor nyilvánvalóan $F(x)+G(x)$ az $f(x)+g(x)$ primitív függvénye. Ezért a Newton-Leibniz szabály alkalmazásával

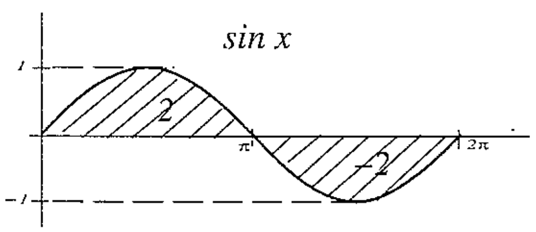
$$\int_a^b (f+g) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

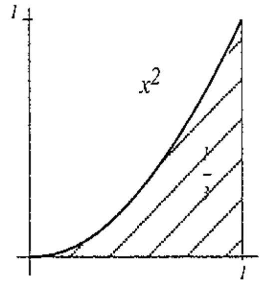
6.2. Példa.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2,$$

de

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0.$$





6.3. Példa.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ezt az integrált a 2.1.2. pontban közelítő öszegek határértékeként már kiszámítottuk.

6.1. Megjegyzés. Állítsuk elő ismét az $F(x)$ függvényt deriváltja segítségével (lásd a 6.1. pontot). Az integrálszámítás alaptétele segítségével kapjuk, hogy ha $F'(x)$ folytonos, akkor

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(u)du$$

és

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

Megkaptuk tehát pontosan is a közelítések alapján kapott sejtésünket.

6.2. Megjegyzés. Az

$$\left(\int_0^x f(u)du\right)' = f(x)$$

és $\displaystyle\int_{a_0}^x f(u)du = \int_{a_1}^x f(u)du + \int_{a_0}^{a_1} f(u)du = \int_{a_1}^x f(u)du + c \quad \left(c = \int_{a_0}^{a_1} f(u)du\right)$

összefüggések mutatják, hogy a területfüggvények azonosak a primitív függvényekkel. A második sorban levő egyenlőség adja a határozatlan integrálban használt c konstans szemléletes jelentését.

6.3. Megjegyzés. Az előző megjegyzés alapján világossá válik a primitív függvények összességére, a határozatlan integrálra használt

$$\int f(x)dx$$

jelölés. Sőt a helyettesítéses integrálásnál a dx és dy, akkor még formális, helyettesítései is szemléletes jelentést kapnak.

Tekintsük az $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ integrál egy közelítő összegét. Az alsó és felső összeg közötti értéket kapunk, ha a

$$\tilde{t}_n = \sum_{i=0}^n f(g(x_i))g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^n f(g(x_i))g'(x_i)\Delta x_i$$

összeget vesszük. Ha az $y = g(x)$ helyettesítést vesszük, $\frac{dy}{dx} = g'(x)$. Mivel $\Delta y \approx g'(x)\Delta x$, ezért

$$\Delta y_i = g(x_{i+1}) - g(x_i) = y_{i+1} - y_i \approx g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = g'(x_i)\Delta x_i.$$

Innen

$$\tilde{t}_n = \sum_{i=0}^{n} f(g(x_i))g'(x_i)\Delta x_i \approx \sum_{i=0}^{n} f(y_i)\Delta y_i,$$

ami az

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

integrál egy közelítő összege. A pontos számításokat mellőzzük, de meggondolásainkból látható, hogy a $dy = f'(x)dx$ helyettesítés valóságos jelentéssel bír.

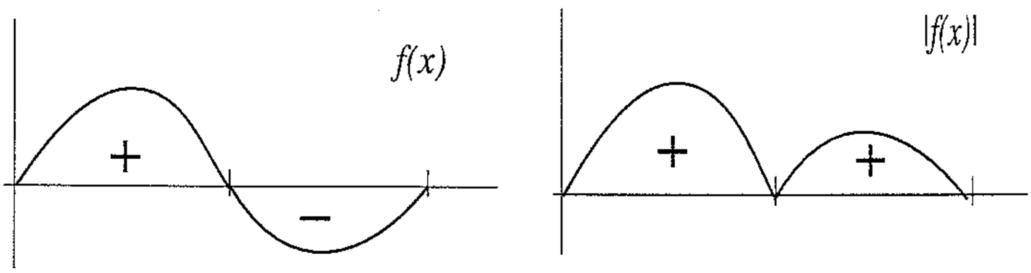
6.6. Az integrál alkalmazásai

Az alábbiakban néhány olyan alkalmazást, példát tekintünk, amelyek illusztrálják az integrálfogalom gyakorlati hasznosságát.

6.6.1. Területszámítási feladatok

Foglaljuk össze eddigi területszámítással kapcsolatos megállapításainkat. Ha $f(x)$ pozitív az $[a, b]$ szakaszon, a terület maga $\int_a^b f(x)dx$. Ha negatív, akkor $-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b(-f(x))dx$. Innen látható, hogy

$$T = \int_a^b |f(x)|dx$$



Megjegyezzük, hogy az $|f(x)|$ függvénynek általában nincs egyetlen formulával megadható primitív függvénye. Ezért az integrálást az a, b és $f(x)$ zéróhelyei által határozott intervallumokon végezzük el.

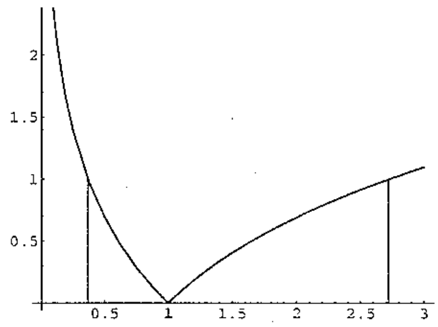
6.4. Példa. Számoljuk ki az $\ln x$ grafikonja és az x tengely közti területet az $[\frac{1}{e}, e]$ szakaszon.

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|dx = -\int_{1/e}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{e} \ln x dx$$

Mivel $\int \ln x dx = x \ln x - x + c$, ezért a fenti integrál

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|dx = [(x - x\ln x)]_{1/e}^{1} + [(x\ln x - x)]_1^e = 1 - \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right) + (e - e) + 1 = 2 - \frac{2}{e} = 2(1 - \frac{1}{e})$$

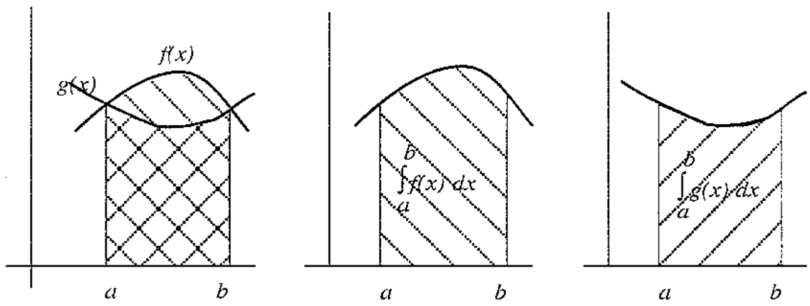
A megmért tartomány az alábbi ábrán látható:



Két függvény grafikonja közti területet az

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

integrál kiszámításával kapjuk meg. Tegyük fel, hogy $f(x) \geq g(x)$ $[a, b]$-n. Ekkor az alábbi ábra alapján



kapjuk, hogy

$$T = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Ha $g(x) > f(x)$, akkor a kivonást fordítva végezzük. Összeségében, kapjuk a kérdéses integrált. Ehhez megkeressük az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásait. Az $[a, b]$ intervallumot ezek részintervallumokra osztják. Ezeken az abszolút értéket feloldva, alkalmazhatjuk a Newton–Leibniz szabályt.

6.6.2. Test mozgása

Legyen a test sebessége $v(t)$, a kezdeti pozíció $s(0) = s_0$. Ekkor a Newton-Leibniz tétel alapján

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v(u)du.$$

A test által megtett út valamely t_1 és t_2 időpontok között

$$\int_{t_1}^{t_2} v(u)du.$$

Innen kapjuk, hogy a test átlagsebessége

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(u)du,$$

ami a $v(t)$ függvény integrálközepe a $[t_1, t_2]$ intervallumon.

Most tegyük fel, hogy az m tömegű testre $F(t)$ erő hat. Az erő pillanatonként változik. Newton második törvénye szerint $F = m \cdot a$, vagyis $\frac{1}{m}F(t) = s''(t)$. Ha a test az $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ kezdeti értékekkel indul, akkor

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{m} \int_0^t F(u)du = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(u)du$$

és

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \left(\int_0^u F(v)dv \right) du$$

A jobboldali integrált úgy számítjuk ki, hogy integráljuk az F függvényt a $[0, u]$ szakaszon, így F integrálfüggvényét kapjuk, majd ezt is integráljuk. Ha a mozgás nem a 0 pillanatban, hanem t_0-ban indul, a formulák hasonlóak. Ezek felírását gyakorlásként az olvasóra hagyjuk.

6.6.3. Munka kiszámítása

Ha a mozgó testre erő hat, a végzett munkát úgy definiáljuk, mint az elmozdulás irányába eső erő és az elmozdulás nagyságának a szorzatát. Ha az erő az elmozdulásra merőlegesen hat, akkor végzett munkája zéró. Az elmozdulás irányába eső erő természetesen változhat. Legyen ez $F(s)$. Ekkor az s_0 pontból s_1-ig való elmozduláshoz szükséges munka

$$W(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} F(s)ds$$

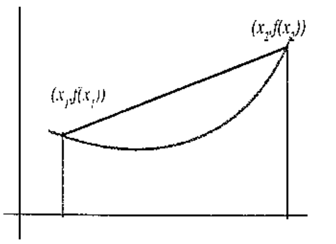
Ugyanis az (s_0, s_1) szakaszon $(s_1 - s_0)/n = h$ (n valamely pozitív egész szám) $(x_0 = s_0, \ldots, x_i = x_0 + ih, \ldots \; x_n = s_1$ hosszúságú szakaszában az $F(s)$ erőt konstansnak véve $(F(x_i)$ az $[x_i, x_{i+1}]$ szakaszon) már alkalmazhatjuk az "erő × elmozdulás" formulát. Ekkor

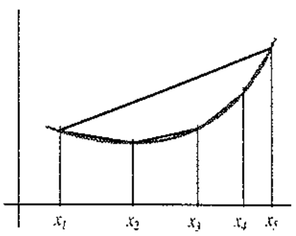
$$W(s_0, s_1) \approx \sum_{i=0}^{n} F(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ami a fenti integrál közelítő összege.

6.6.4. Vonal ívhosszának kiszámítása

Tekintsük az $f(x)$ függvény grafikonját az $[a, b]$ intervallumon. Kérdés milyen hosszú a grafikont alkotó görbe vonal? Közelítsük két adott $x_1, x_2 \in [a, b]$ pont között a görbe $l(x_1, x_2)$ hosszát az $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő szakasz hosszával (lásd a baloldali ábrát).





A Pithagorasz tétel szerint

$$l(x_1,x_2) \approx \sqrt{(f(x_2)-f(x_1))^2+(x_2-x_1)^2} = \left(\sqrt{\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)^2+1}\right)(x_2-x_1)$$

Ha azonban $f(x)$ folytonosan differenciálható és a pontok távolsága kicsiny, akkor a gyökjel alatt levő differenciahányados közel van a függvény x_1 pontbeli deriváltjához. Ezért

$$l(x_1,x_2) \approx \left(\sqrt{(f'(x_1))^2+1}\right)(x_2-x_1)$$

Most tekintsük az $[a,b]$ intervallumot. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n részre ($h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $x_n=b$). Az (x_i,x_{i+1}) intervallumon közelítsük a görbét az $(x_i,f(x_i))$ pontokat összekötő törtvonallal (fenti, jobboldali ábra), amelynek hosszát a fentiek alapján becsülhetjük. Ezért

$$l(a,b)=\sum_{i=0}^{n-1} l(x_i,x_{i+1}) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{(f'(x_i))^2+1}\right)(x_{i+1}-x_i),$$

ami nem más, mint egy integrálközelítő összeg. A beosztás minden határon túli finomításával az

$$l(a,b)=\int_a^b \sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx$$

integrálhoz jutunk.

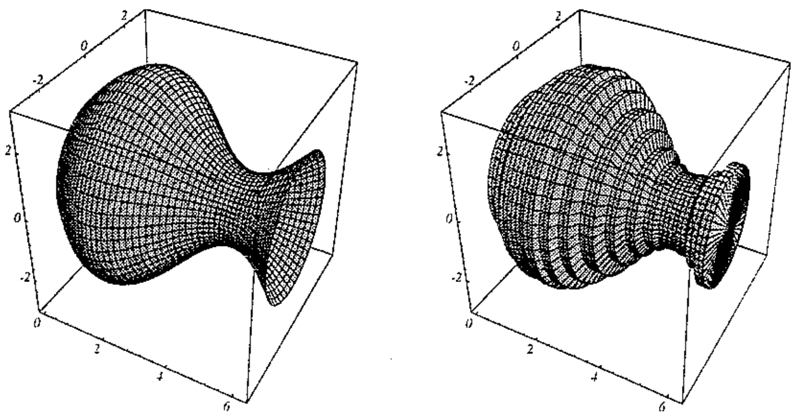
6.5. Példa. Számítsuk ki az $r>0$ sugarú kör kerületét. Ez négyszerese az $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ függvény grafikonja ívhosszának a $[0,r]$ intervallumon. Az ívhosszat megadó integrált az $x=r\sin u$, $dx=r\cos u\,du$ helyettesítést és a Newton–Leibniz szabályt alkalmazva számíthatjuk ki:

$$K=4l(0,r)=4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=[r\arcsin x]_0^1=2r\pi.$$

A részletes számolást az olvasóra bízzuk.

6.6.5. Forgástestek térfogatának kiszámítása

Tekintsük az $y=f(x)$ függvényt. Forgassuk meg ennek grafikonját térben az x-tengely körül. Számítsuk ki az így kapott hengerszimmetirikus test térfogatát az $[a,b]$ intervallumon!



A kapott testet szabályos hengerekkel (korongokkal) közelítjük. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n részre ($h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $x_n=b$). Az (x_i,x_{i+1}) intervallumon közelítsük a testet egy $f(x_i)$ sugarú hengerrel. Ekkor a test térfogatát a

$$V_n=\sum f^2(x_i)h\cdot\pi=\pi\sum f^2(x_i)h$$

összeg közelíti. Természetesen belső és külső közelítéseket is vehetünk.

$$V_{n,belső} = \pi \sum \min_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f^2(t)h; \quad V_{n,külső} = \pi \sum \max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f^2(t)h$$

Ezek az összegek mind *integrálközelítésnek* tekinthetők. Ha a beosztást minden határon finomítjuk, folytonos $f(x)$ esetén a

$$V(a,b) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

integrált kapjuk. A kapott képlet konstans $f(x)$ esetén visszaadja a henger térfogatára ismert $r^2\pi m$ formulát.

6.6. Példa. A kapott képlet segítségével kiszámíthatjuk a gömb térfogatát Tekintsük az r sugarú origó középpontú felső félkört és ezt forgassuk meg. A felső félkör képlete

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ki kell számítanunk tehát a

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi(r^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-r}^{r} = \pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \frac{4r^3\pi}{3},$$

amint az az elemekből is ismert.

6.7. Közelítő integrálási formulák

Ebben a pontban az integrál kiszámításának közelítő eljárásaival foglalkozunk. Kérdezhetjük, hogy mi szükség erre, hiszen használhatjuk a nagyon kényelmes Newton- Leibniz formulát. Ez igaz, de azt is tudjuk, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek a primitív függvénye nem adható meg formulával. Másrészt, számos függvény kísérleti úton adott és szükség van határozott integráljuk kiszámítására valamely $[a,b]$ intervallumon. Azonban ezekre nem tudjuk alkalmazni a Newton-Leibniz szabályt.

Az integrálközelítés technikája általában ugyanaz: Az $f(x)$ grafikonja és az x-tengely közti tartományt valamilyen síkidomrendszerrel próbáljuk közelíteni, és ennek a területét mérjük.

Legyen tehát adott az $[a,b]$ szakaszon folytonos $f(x)$ függvény. Osszuk fel az $[a,b]$ szakaszt n egyenlő részre és legyen $h = (b-a)/n$. A már ismert $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_i = a+ih$, $x_n = a+nh = b$ osztáspontokat kapjuk. A

$$\underline{t_n} = h \sum_{i=0}^{n-1} \min_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \quad \text{alsó közelítést}$$

és a

$$\overline{t_n} = h \sum_{i=0}^{n-1} \max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \quad \text{felső közelítést}$$

az integrál definíciójánál használtuk. Numerikusan könnyebben kezelhető a

$$t_{n,bal} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

összeg.

A $\underline{t_n}$-nél a téglalapok magassága az $f(x)$ minimuma, a $\overline{t_n}$-nél az $f(x)$ maximuma az egyes részintervallumokon, míg a $t_{n,bal}$ esetén az (x_i, x_{i+1}) szakaszon a közelítő téglalap magassága az $f(x)$ függvénynek a bal oldali végpontban (x_i-ben) felvett értéke.

Hasonlóan közelíthetünk a jobboldali végpontokban felvett értékekkel. A

$$t_{n,jobb} = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

összeget kapjuk.

Általában pontosabb közelítést kapunk, ha a $t_{n,bal}$ és $t_{n,jobb}$ számtani közepét vesszük, azaz az $[x_i, x_{i+1}]$ szakaszon a "függvény alatti területet" az $(x_i, x_{i+1}, f(x_{i+1}), f(x_i))$ csúcsokkal rendelkező trapéz területével közelítjük, mivel

$$\frac{1}{2}(f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)) = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Ezért az így nyert

$$\begin{aligned} T_{n,trapéz} &= \frac{t_{n,bal} + t_{n,jobb}}{2} = \frac{b-a}{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right) = \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right) \end{aligned}$$

szabályt trapézszabálynak nevezzük. Belátható, hogy folytonos f függvény esetén $\underline{t_n}$, $\overline{t_n}$, $t_{n,bal}$, $t_{n,jobb}$ és $t_{n,trapéz}$ egyaránt tetszőleges pontossággal közelíti az

$$\int_a^b f(x)dx$$

integrált, ha $n \to \infty$. A különbség a közelítés sebességében van. A közelítésekkel kapcsolatban lásd az alábbi ábrát.