5. A határozatlan integrál: a deriválás megfordítása

A differenciálszámítás keretén belül azzal foglalkoztunk, hogy az adott $f(x)$ függvény képletének ismeretében hogyan határozhatjuk meg a deriváltakat és a kiszámított deriváltak segítségével következtettünk az $f(x)$ függvény viselkedésére. A gyakorlatban gyakran csak a deriváltat ismerjük. A mozgástörvények a gyorsulást (a mozgás második deriváltja) adják meg ($F = ma$). Problémánk tehát, adott $f'(x)$ esetén keressük meg az $f(x)$ függvényt.

A kérdést kétféle módon közelítjük meg, melyeknek önálló speciális alkalmazásai lesznek, de lényegében ugyanazt az eredményt adják.

Ebben a fejezetben a differenciálási szabályok megfordításával formálisan gondolkodunk. Például, keressük azt a függvényt, amelynek deriváltja $\cos x$. Egy ilyen függvény a $\sin x$. De megfelel az $1+\sin x$ is. Ezáltal a ***primitív függvény és a határozatlan integrál*** fogalmához jutunk.

Ez a fajta okoskodás nem minden esetben vezet eredményre. Ekkor egészen rövid intervallumokon közelítjük a függvény változását érintőinek megváltozásával, majd ezeket összegezve kapjuk a függvény változásának becslését. Hasonló technikát alkalmaztunk az $f(x)$ függvény és az x-tengely közti tartomány területének kiszámítása (lásd a 2.1.2. pontot) során. Ekkor rövid intervallumokon becsültük a területet, majd ezeket összegeztük. Ezek a példák a ***határozott integrál fogalmához*** vezetnek, amellyel a következő fejezetben foglalkozunk.

5.1. A primitív függvény, a határozatlan integrál definíciója

A bevezetőben vázoltak alapján, adott $f(x)$ függvényhez kell keresnünk olyan $F(x)$ függvényt, mely rendelkezik az $F'(x) = f(x)$ tulajdonsággal. Bevezetjük az alábbi fogalmat.

5.1. Definíció. *Legyen az $f(x)$ függvény értelmezve az $< a, b >$ intervallumon. Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ primitív függvénye az $< a, b >$ intervallumon, ha ott $F(x)$ differenciálható és*

$$F'(x) = f(x).$$

5.1. Példa. Az $f(x) = x$ primitív függvénye $x^2/2$, mivel $(x^2/2)' = x$. Az $f(x) = \cos x$ primitív függvénye $\sin x$ és $\sin x + 1$ is, mert $(\sin x)' = \cos x$ és $(\sin x + 1)' = \cos x$.

Kérdés, hogy ha létezik primitív függvény, az mennyire egyértelmű. Láttuk, hogy a konstansban különböző $\sin x$ és $\sin x + 1$ függvények egyaránt primitív függvényei a $\cos x$ függvénynek, mivel a konstans függvények differenciálhányadosa azonosan nulla.

Ugyanezt a megfontolást az általános esetben alkalmazva kapjuk, hogy ha $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye valamely $< a, b >$ intervallumon, akkor tetszőleges c konstans esetén az $F(x) + c$ is primitív függvény ugyanott.

Vajon ezzel kimerítettük az összes lehetőséget? A válasz igenlő. Ugyanis, legyenek $F_1(x)$ és $F_2(x)$ primitív függvények ugyanazon az intervallumon. Ekkor a primitív függvény definíciója miatt

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0.$$

A 4.1 tétel szerint valamely intervallumon csak a konstans függvény deriváltja lehet azonosan nulla. Ezért

$$F_1(x) - F_2(x) = konstans.$$

Beláttuk tehát, hogy a ***primitív függvény egy konstans hozzáadásától eltekintve egyértelműen meghatározott, vagyis a primitív függvények csak konstansban különbözhetnek egymástól.***

5.2. Definíció. *Az $f(x)$ függvény valamely $< a, b >$ intervallumon vett primitív függvényeinek összességét az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük az $< a, b >$ intervallumon. Jelölése:*

$$\int f(x)dx.$$

Ha $F(x)$ primitív függvény, akkor

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

ahol c tetszőleges konstans.

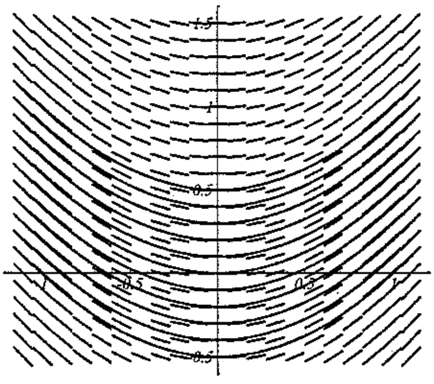
Megjegyezzük, hogy az $\int f(x)dx$ jelölésben az x változó helyett más változó is írható, például $\int f(y)dy = F(y)+c$. Néha használjuk az $\int f$ jelölést is. Az integráljel mögött álló $f(x)$ függvényt **integrandusnak** nevezzük.

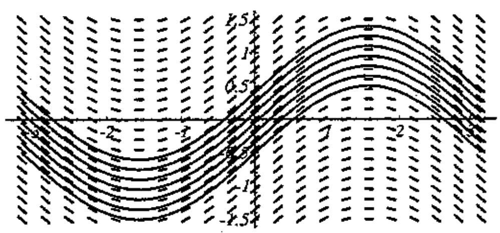
Geometriai jelentés

A határozatlan integrál geometriai jelentése igen egyszerű. A keresett $F(x)$ primitív függvény meredeksége, deriváltja $(f(x))$ minden pontban adott. Nem ismerjük az $F(x)$ a grafikonját, de tudjuk, hogy bármely x_0 helyen deriváltja $f(x_0)$, azaz ha a grafikon átmegy valamely $(x_0, y_0))$ ponton, akkor ott érinti az $y = y_0 + f(x_0)(x - x_0)$ egyenest. Ezután a koordinátarendszer minden (x, y) pontjában rajzoljunk egy $f(x)$ meredekségű egyenesdarabkát. Mármost, ha $F(x)$ primitív függvény, akkor grafikonja minden $(x, F(x))$ pontban érinti az ott felrajzolt egyenest, azaz "simul" a kapott "érintőmezőhöz".

Mivel bármely y-tengellyel párhuzamos egyenes pontjaiból indított érintődarabkák párhuzamosak, ezért egy primitív függvény grafikonját az y-tengely mentén eltolva, a kapott grafikon szintén érinti a megfelelő egyeneseket. Tehát az y-tengely menti eltolással újra primitív függvényt kapunk.

Ezt az $f(x) = x$ és az $f(x) = \cos x$ példáján mutatjuk be.





Kérdés, hogy egy adott folyamat esetén, hogyan válasszuk ki a folyamatot leíró függvényt a primitív függvények sokaságából. Az előbbi ábrák sugallják, hogy a függvény értékét valamely helyen rögzítenünk kell, vagyis meg kell adnunk a grafikon egy $(x_0, F(x_0))$ pontját. Igaz az alábbi állítás.

5.1. Tétel. *Legyen $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye az $< a, b >$ intervallumon. Ekkor az (x_0, y_0) $(x_0 \in < a, b >)$ ponton átmenő $F_1(x)$ primitív függvényt az*

$$F_1(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

képlettel kaphatjuk meg.

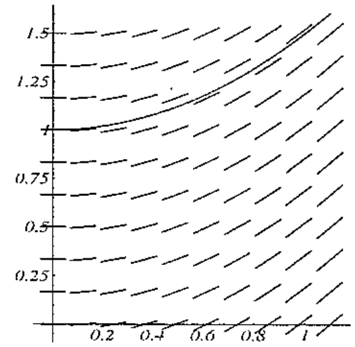
5.2. Példa. Tekintsük az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás esetét. Legyen $v(t) = t$ és $s(0) = 1$. Ekkor

$$\int v(t)dt = \frac{t^2}{2} + c$$

$$1 = s(0) = c \quad \text{vagyis} \quad c = 1.$$

tehát

$$s(t) = \frac{t^2}{2} + 1.$$



Ha a gyorsulás adott, pl. $a(t) = 1$, $v(0) = 1$, akkor $v(t) = t + c$. Mivel $v(0) = 1 = c$, ezért $v(t) = t + 1$. Ha $s(t)$-t keressük, $s(0)$-t is rögzítenünk kell a fent megadott módon. Ha $s(0) = 1$ ismét, akkor

$$s(t) = \frac{t^2}{2} + t + c_1, \quad \text{de} \quad s(0) = 1 \quad \text{miatt}$$

$$s(0) = 1 = c_1, \quad \text{ezért}$$

$$s(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1.$$

Általánosan mondhatjuk, hogy az $s(t)$ útfüggvény a $v(t)$ sebesség primitív függvénye, a sebesség pedig az $a(t)$ gyorsulás primitív függvénye.

Befejezésül jegyezzük meg, hogy a **differenciálás és a primitív függvény keresés (integrálás) egymás inverz műveletei.** Ezért jogos lehet a félelmünk, hogy integrálni sokkal nehezebb, mint differenciálni, sőt, mint ahogyan az inverz függvény sem mindig létezik, nem létezik mindig primitív függvény sem. Megjegyezzük továbbá, hogy az igen fontos

$$e^{-x^2}$$

függvénynek nem lehet a primitív függvényét formulával felírni.

5.2. Egyszerű integrálási szabályok

Ahhoz, hogy a határozatlan integrál fogalmát a gyakorlatban is használni tudjuk, szükség van a keresést megkönnyítő szabályokra. Előre leszögezzük, speciális esetektől eltekintve, nincs általános szabály egy adott függvény integráljának meghatározására, mert nem is biztos, hogy előállítható formulával!

Mivel az integrálás a deriválás megfordítása, ezért a szabályok a deriválási szabályok megfordításaként állnak elő. Az alábbi szabályok közvetlenül, differenciálással ellenőrizhetők:

$$\begin{aligned}
&\int cf(x)dx &&= c\int f(x)dx;\\
&\int (f(x)+g(x))dx &&= \int f(x)dx + \int g(x)dx;\\
&\int 0\ dx &&= \text{konstans};\\
&\int x^n dx &&= \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1);\\
&\int \tfrac{1}{x}dx &&= \ln|x| + c \quad (x \neq 0) \quad \text{(Az abszolút érték az } x < 0 \text{ értékek miatt kell)};\\
&\int e^x dx &&= e^x + c;\\
&\int \sin x dx &&= -\cos x + c;\\
&\int \cos x dx &&= \sin x + c;\\
&\int \tfrac{1}{\cos^2 x}dx &&= \operatorname{tg} x + c \quad (x \neq \tfrac{\pi}{2} \pm k\pi).
\end{aligned}$$

5.3. A parciális integrálás szabálya

A szorzat differenciálására vonatkozó szabályt is hasznosíthatjuk. Differenciáljuk az $f(x)g(x)$ szorzatot!

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ha az azonosságot integráljuk, az

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

egyenlőséghez jutunk, amelyet átrendezve kapjuk:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Ez a parciális integrálás szabálya. Nem számolja ki az integrált, de egy másik (remélhetőleg egyszerűbb) integrál kiszámítására vezeti vissza. Ezt a szabályt az alábbi módon értelmezzük:

Egy szorzatot kell integrálnunk, amelynek első tényezője ($f'(x)$) egy $f(x)$ függvény deriváltja. Meg kell keresnünk tehát az első tényező ($f'(x)$) *egy primitív függvényét*. Ezután a második tényező deriváltját számoljuk ki, és alkalmazzuk a szabályt. A művelet sikere azon múlik, hogy az $f(x)g'(x)$-t könnyebb-e integrálni, mint $f'(x)g(x)$-t.

5.3. Példa. Számoljuk ki az $\int xe^x dx$ integrált. Legyen $f'(x) = e^x$, $g(x) = x$. Ekkor $f(x) = e^x$ és $g'(x) = 1$. Ezért

$$\int xe^x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x + C.$$

Látjuk, hogy a kapott integrált ki tudtuk számítani. Próbáljuk most fordítva: Legyen $f'(x) = x$, $g(x) = e^x$. Ekkor $f(x) = x^2/2$, $g'(x) = e^x$. Innen

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

ahol a kapott integrál nem egyszerűbb, mint az eredeti. Ez rossz választás volt.

5.4. Példa. Most számoljuk ki az $\ln x$ integráltját: Mivel $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$, ezért lehetséges az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \ln x$ választás. Ekkor

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x \ln x - x + C.$$

5.5. Példa. Befejezésül egy harmadik tipikus példa: $\int e^x \sin x dx$. Most bármelyik választás jó lesz. Legyen $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$. A szabály szerint

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Integráljuk a jobboldal második kifejezését ugyanígy: Itt megint $f'(x) = e^x$.

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

Ezt behelyettesítve az első egyenlőségbe

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,$$

ami *egy egyenlet* a keresett integrálra nézve. Ezt megoldva kapjuk, hogy

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

A fenti tapasztalatok alapján felsoroljuk a parciális integrálás néhány tipikus esetét.

$\int x^n e^x dx$		$(f'(x) = e^x, g(x) = x^n)$
$\int x^n \ln x dx$		$(f'(x) = x^n, g(x) = \ln x)$
$\int x^n \sin x dx$		$(f'(x) = \sin x, g(x) = x^n)$
$\int e^x \sin x dx$;	$\int \sin x \cos x dx$	mindegyik választás jó

5.4. A helyettesítéses integrálás szabálya

Próbáljuk megkeresni az összetett függvény deriválási szabályának, a láncszabálynak a megfordítását. Ismert, hogy

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x))g'(x)$$

Ezt integrálva kapjuk, hogy

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x))g'(x)dx$$

Ha $F'(x) = f(x)$ akkor

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

ahol a jobboldalon $F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye. A jobboldal nem más, mint

$$\int f(y)dy = F(y) + c,$$

ha az $y = g(x)$ helyettesítést használjuk. A két egyenlőséget összevetve kapjuk, hogy

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy,$$

ha $y = g(x)$. Emlékezve a derivált dy/dx jelölésére, kapjuk, hogy az $y = g(x)$ helyettesítés mellett a $dy/dx = g'(x)$, vagyis a $dy = g'(x)dx$ helyettesítést is elvégeztük. Ezt most teljesen formálisan tettük. Azonban valóban komoly köze van a derivált segítségével megadott *kis változásokhoz, a függvény változásának az érintő megváltozásával való közelítéséhez.* Ez a következő fejezetben világossá válik.

A fent leírt szabályt nevezzük a **helyettesítéses integrálás szabályának.** Akkor használható, ha az integrandus egy összetett függvény és belső függvénye deriváltjának a szorzata.

5.6. Példa. Számoljuk ki az

$$\int (2x+1)^{10}\, dx$$

integrált. Legyen $y = (2x + 1)$ és $dy = 2dx$. Innen

$$\int (2x+1)^{10}\, dx = \int \frac{y^{10}}{2} dy = \frac{y^{11}}{22} + c = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + c.$$

5.7. Példa. Számoljuk ki az

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$$

integrált. Legyen $y = \sin x$, $\quad dy = \cos x\, dx$ ezért

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

5.8. Példa. A $\operatorname{tg} x$ integrálása hasonlóan megy:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{y} dy = -\ln|y| + c = -\ln|\cos x| + c$$

ahol $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$.

5.9. Példa.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

ahol $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$.

5.10. Példa.

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + c = \ln|e^x + 1| + c,$$

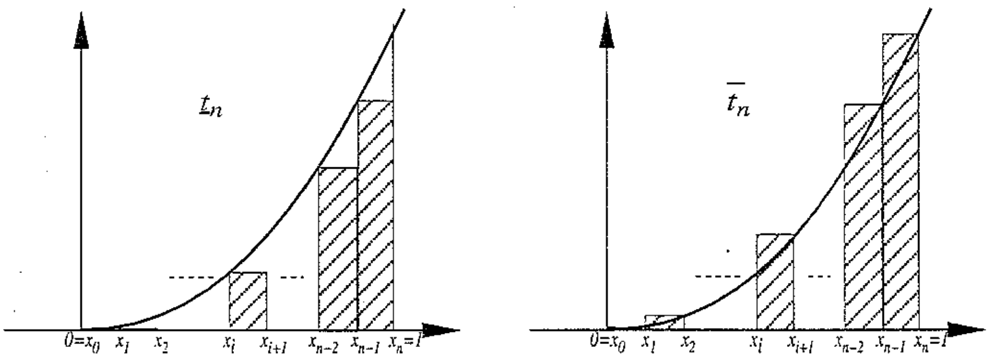
ahol $y = e^x + 1$ $dy = e^x dx$.

A példákban előforduló tipikus eseteket írjuk fel általános formában:

$$\begin{aligned}
\int \left(f(x)\right)^n f'(x)dx &= \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + c \\
\int f(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\int f(y)dy \quad (y = ax + b,\ dy = a \cdot dx)
\end{aligned}$$

6. A határozott integrál

A határérték fogalmának bevezetésénél a 2.1.2. pontban kiszámítottuk az $f(x) = x^2$ függvény és az x-tengely közti tartomány területét a $[0,1]$ intervallumon, oly módon, hogy a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre osztottuk, és a vizsgált tartomány területét alulról illetve felülről becsültük az ábrán látható téglalapok területének összegével, majd ezek határértékét vettük.



Hasonló gondolatmenetet követhetünk tetszőleges nemnegatív folytonos $f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely közti terület kiszámítása során is. Ha a függvény negatív, és a terület nagyságára van szükségünk, akkor a függvényértékek abszolút értékét kell vennünk. A következő pontban azonban látni fogjuk, hogy jobban kezelhető fogalomhoz jutunk, ha a területet negatívnak vesszük negatív függvény esetén.

A fogalmak pontos tárgyalása előtt, következő pontban a területszámítástól látszólag független problémát vázolunk. Valamely függvény és deriváltja közti kapcsolatot tekintjük egy új módszerrel. Mint látni fogjuk ez is területszámítási problémára vezet.

6.1. A függvény változásának előállítása deriváltjából

A határozatlan integrált használva formális, technikai okoskodásokkal próbáltunk valamely függvényt deriváltja ismeretében megkeresni. Ez nem mindig lehetséges. Most közelítő eljárásokkal kísérletezünk.