3. A differenciálszámítás elemei

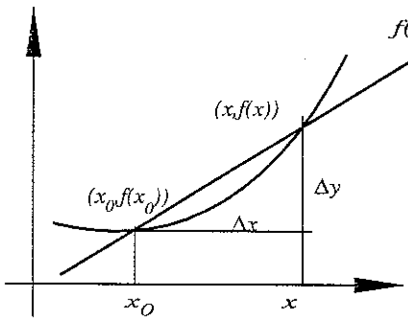
3.1. Bevezetés

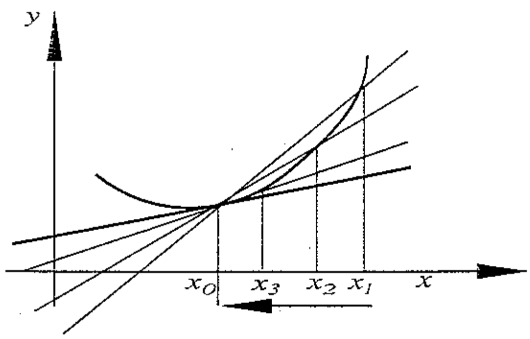
A határértékek bevezetésénél a 2. fejezetben az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintőjét az ezen a ponton átmenő szelők határhelyzeteként definiáltuk. Az érintő $m(x_0)$ meredeksége pedig az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelők

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

meredekségének a határértéke ha $x \to x_0$:

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$





Azt is láttuk, hogy ha $f(x)$ lineáris függvény, annak meredekségét kapjuk. Az $m(x_0)$ határérték tehát az egyenes meredeksége általánosításának tekinthető. A Δy az y változó megváltozása a Δx hosszúságú intervallumon. A $\Delta y/\Delta x$ hányados a függvény átlagos változási sebessége, változási rátája az adott szakaszon. A

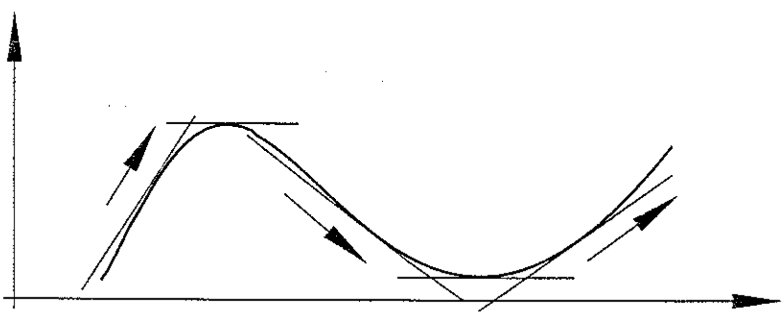
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

határérték a **függvény pillanatnyi változási rátája**, amely a függvény megváltozásának mértéke az adott pillanat közelében. Az egyenes esetén ez a mérték, a meredekség, konstans.

Ebben a fejezetben az *általánosított meredekség elméletének, a* **differenciálszámításnak** alapjaival foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy ez az elmélet alapvető eszköz a függvények viselkedésének tanulmányozásához.

A számos alkalmazás közül két igen fontosat vázolunk. A tárgyalás során ezeket matematikai pontossággal is megfogalmazzuk.

Tudjuk, hogy ha az egyenes meredeksége pozitív, akkor az egyenes növő, ha a meredekség negatív, akkor csökkenő. Hasonlót tapasztalunk általános esetben is az érintő meredekségét és a függvény monotonitását figyelve. Ezt illusztrálandó, tekintsük az alábbi ábrát:



Végül, felhívjuk a figyelmet az érintő kitüntetett tulajdonságára. Az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0)$ pontban húzott érintő minden más, ezen a ponton átmenő egyenesnél pontosabban közelíti a függvényt az x_0 hely közelében. Ezért a függvény megváltozását az érintő megváltozásával becsülhetjük az x_0 környezetében:

$$\Delta y \approx m(x_0)\Delta x, \qquad f(x) - f(x_0) \approx m(x_0)(x - x_0),$$

Ennek számos alkalmazásával fogunk találkozni az elméleti és a gyakorlati (pl. fizikai problémák) során.

3.2. A differenciálhányados definíciója

3.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely (a, b) intervallumon. Legyen $x_0 \in (a, b)$.*

Ha a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

véges határérték létezik, akkor ezt a határértéket a függvény x_0-beli **differenciálhányadosának (deriváltjának)** *nevezzük, és $f'(x_0)$- lal jelöljük. Ha a differenciálhányados az (a, b) intervallum minden pontjában létezik, akkor $f(x)$ az (a, b) intervallumon deriválható és deriváltfüggvénye $f'(x)$.*

Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kifejezést, minthogy a differenciák hányadosa, **differenciahányadosnak** hívjuk. A differenciahányadosra használatos a korábbiakban is alkalmazott

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

jelölés. A differenciálhányadost pedig gyakran

$$\frac{dy}{dx}$$

jelöli, ami igen jól utal a differencia– és differenciálhányados közötti szoros rokonságra és a formális okoskodásoknál is hasznos lesz.

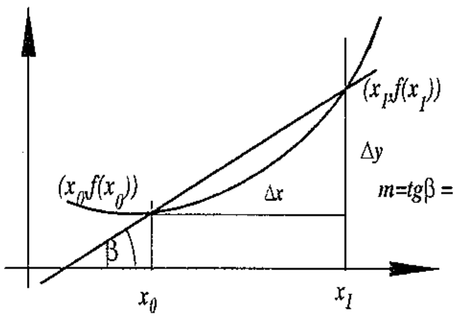
A derivált határértékként való definíciójából azonnal adódik, hogy ha létezik, akkor egyértelmű. Ugyanakkor nem biztos, hogy a derivált létezik.

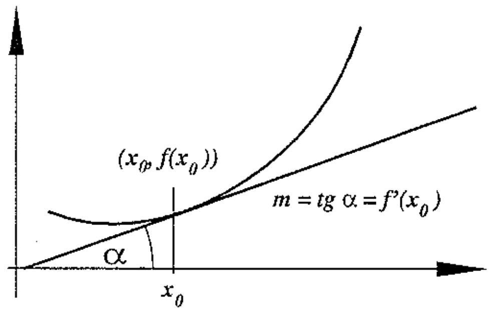
A geometriai értelmezés a bevezetés alapján nyilvánvaló. Foglaljuk össze eddigi geometriai megfontolásainkat. A differenciahányados bármely két $x_0, x_1 \in D_f$ pontra képezhető, és az $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelő iránytangense. Az ezen két ponton átmenő szelő egyenlete

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Az $f(x)$ függvény differenciálható, "sima" x_0-ban, ha létezik a grafikonjának érintője az $(x_0, f(x_0))$ pontban. Az $f'(x_0)$ derivált értéke az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő meredeksége. Az érintő egyenlete pedig

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$





3.1. Példa. Tekintsük az $f(x) = ax + b$ egyenest.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} a\frac{x - x_0}{x - x_0} = a.$$

Formálisan is visszakaptuk az ismert meredekség fogalmat. Az érintő az egyenes maga.

3.2. Példa. Legyen $f(x) = x^2$. Ekkor $f'(x) = 2x$.

Rögzítsük az x_0 helyet.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

A függvény meredeksége nem konstans.

3.3. Példa. Legyen $f(x) = x^3$ és $x_0 = 1, x_1 = 2$. Határozzuk meg az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelő valamint az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő érintő egyenletét.

A szelő kérdése gyorsan elintézhető, $f(1) = 1$, $f(2) = 8$, tehát az $(1,1)$ és $(2,8)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét keressük. A meredekség $m = (8-1)/(2-1) = 7$, az egyenlet pedig

$$y - 1 = 7(x - 1).$$

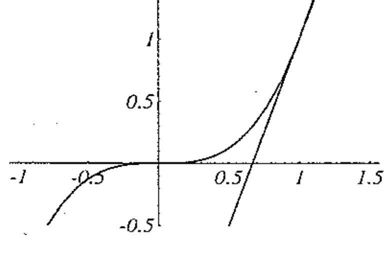
Az érintőhöz szükségünk van a deriváltra. Mivel a derivált kiszámítására vonatkozó szabályokkal később foglalkozunk, ezért használjuk a definíciót. Legyen x_0 adott.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

A derivált értéke az $x_0 = 1$ pontban $f'(1) = 3$. Az érintő egyenlete ezek után

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1);$$

$$y - 1 = 3(x - 1).$$

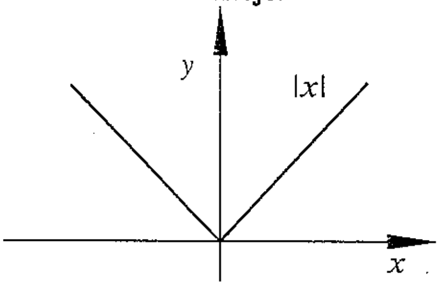


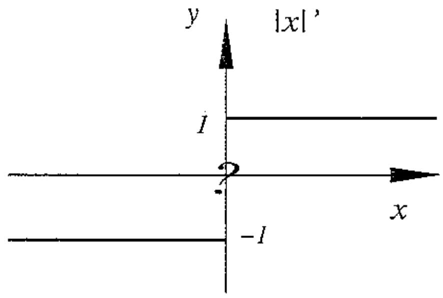
3.4. Példa. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{-x^2}$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya a $\{0\}$ halmaz. Nincs értelme a deriváltnak, hiszen már a differenciahányadosok keresése is értelmetlen.

3.5. Példa. Tekintsük most az

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

függvényt az $x_0 = 0$ pontban. A függvény grafikonja az $x_0 = 0$-ban megtörik. A görbének a $(0, 0)$ pontban nincs érintője.





Nézzük meg, mi történik a differenciahányadossal. Ha $x < 0$, akkor

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1;$$

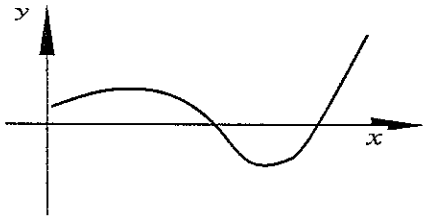
ha viszont $x > 0$, akkor

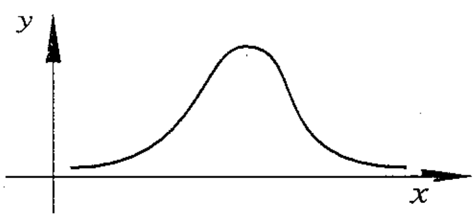
$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

Következésképpen, a differenciahányadosnak nincs határértéke, midőn $x \to 0$, nem létezik differenciálhányadosa az $x_0 = 0$ pontban. Léteznek ugyanakkor az $x < 0$, illetve az $x > 0$ megszorítással a jobb és baloldali határértékek.

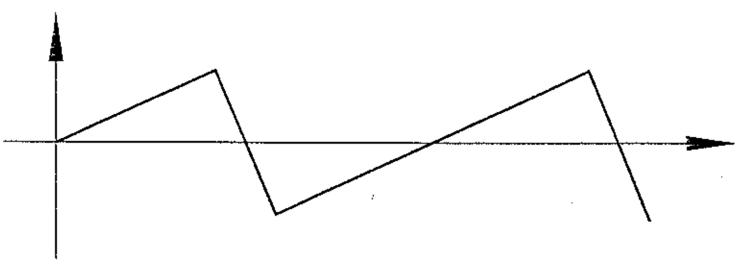
Az $|x|$ függvénynél tapasztaltakat általánosíthatjuk. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ha a grafikon nem "sima", az x_0 pontban megtörik vagy szakadása van, akkor abban a ponban nem differenciálható.

3.6. Példa. Sima görbék például az alábbiak:

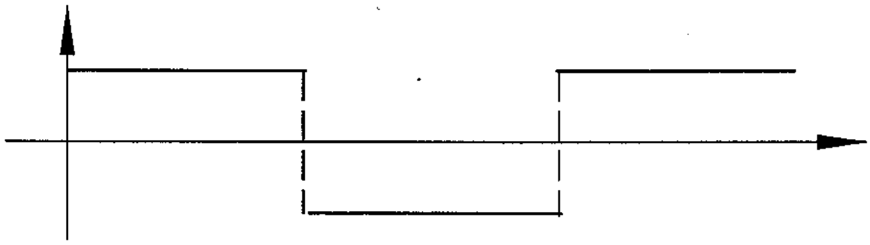




Töréspontjai vannak az alábbi fűrészfogas függvénynek, amely az elektronikában gyakori:



Szakadásai vannak a következő grafikonnak (lásd a folytonosságról szóló 2.6. fejezetet), amely a számítástechnikában alapvető:



3.3. A deriválható függvény folytonossága

Láttuk, hogy valamely folytonos függvény nem feltétlenül deriválható. Ugyanakkor a deriválhatóságból következik a függvény folytonossága.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ értelmezve van valamely (a, b) intervallumon, és $f(x)$ differenciálható az $x_0 \in (a, b)$ pontban. Ekkor $f(x)$ folytonos is x_0-ban.*

Az állítást nagyon könnyen igazolhatjuk. Mivel $f(x)$ deriválható és

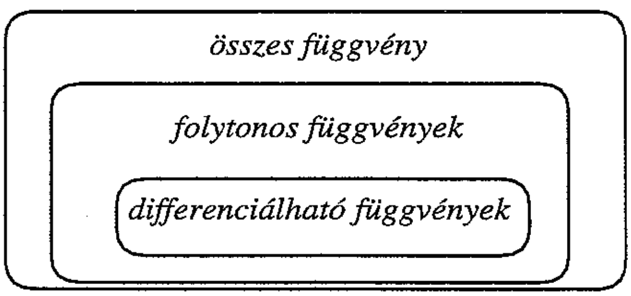
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

ezért

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

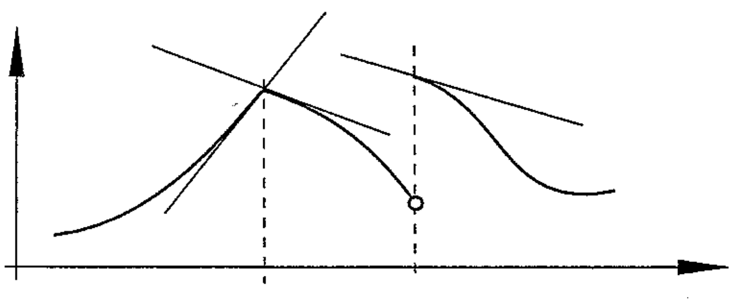
azaz az $f(x)$ függvény folytonos x_0-ban.

Tételünkből kapjuk a függvények különböző osztályainak kapcsolatát.



3.4. Féloldali deriváltak

Az $|x|$ esetén a féloldali határértékek létezése azt jelenti, hogy léteznek a bal– és jobboldali érintők. Különös jelentőségük van a töréspontok (esetleg szakadások !) esetén.



3.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely $(a, x_0]$ szakaszon. Ekkor az $f(x)$ baloldali deriváltjának nevezzük x_0-ban a*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

értéket.

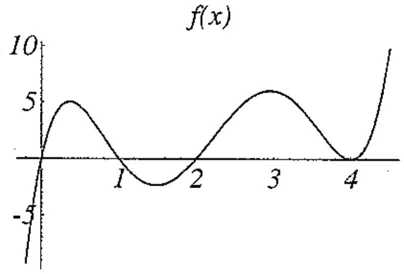
3.3. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ értelmezve van valamely $[x_0, b)$ szakaszon. Ekkor az $f(x)$ jobboldali deriváltjának nevezzük x_0-ban a*

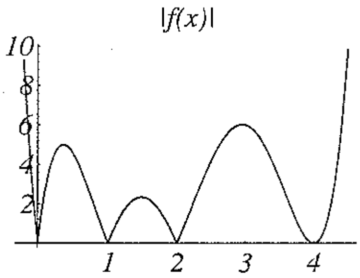
$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

értéket.

Nyilvánvaló, hogy ha $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0)$ léteznek és $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, akkor $f'(x)$ is létezik, és a féloldali deriváltak közös értékével egyezik meg.

3.7. Példa. Legyen $f(x)$ differenciálható. Az $|f(x)|$ függvénynek csak a féloldali deriváltjai léteznek az $f(x)$ zéróhelyeiben, ha ott $f'(x) \neq 0$.



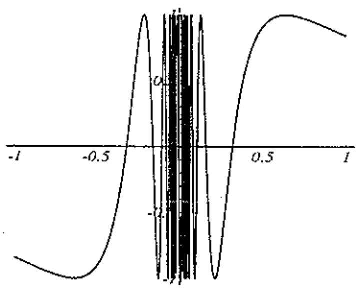


Felmerülhet a kérdés, hogy vajon minden függvényre legalább a féloldali deriváltak léteznek-e. Szerencsére a bennünket körülvevő világ, és ezért a függvények világa is sokkal gazdagabb annál, hogy erre a válasz igenlő legyen.

3.8. Példa. Az

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

függvény nem folytonos és nem differenciálható se jobbról, se balról az x=0 helyen.



3.5. Differenciálási szabályok

Már sok mindent tudunk a differenciálhányadosról, de az alkalmazások során az első lépésnél megakadnánk. Ugyanis igen nehéz lenne minden függvény deriváltját a definíció alapján közvetlenül kiszámolni. Ebben a pontban a legfontosabb differenciálási szabályokat tekintjük át.

3.5.1. A hatványfüggvények differenciálhányadosa

1. $f(x) = \text{konstans} \Rightarrow f'(x) = 0.$

Az állítás nyilvánvaló, ui.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv 0.$$

2. $(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$

A bizonyítást elvégeztük a 3.2. pont példái között.

3. *Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Ekkor*

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = \\ &= (x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \ldots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}, \end{aligned}$$

mivel az első sor jobboldalán összesen n tag szerepel és mindegyikre igaz, hogy

$$\lim_{x \to x_0} x^i x_0^{n-1-i} = x_0^{n-1}.$$

Később be fogjuk bizonyítani, hogy ez az állítás igaz tetszőleges hatványkitevő (negatív, tört és irracionális) esetén is. Pontosabban:

4. *Ha $\alpha \neq 0$, akkor*

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

3.9. Példa.

$$\begin{aligned} (x^{10})' &= 10x^9, \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= \left(x^{-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \\ (\sqrt{x})' &= \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (x^\pi)' &= \pi \cdot x^{\pi-1}. \end{aligned}$$

3.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ deriváltja

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények deriválhatók, és

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Először tekintsük a $\sin x$ függvényt, legyen x_0 adott. Képezzük a differenciahányadost:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}.$$

Az első egyenlőségnél felhasználtuk az

$$\sin\alpha - \sin\beta \equiv 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

azonosságot. Mivel $\cos x$ folytonos,

$$\lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0.$$

A szorzat második tényezőjére pedig kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

Itt az $u = (x - x_0)/2$ helyettesítést és a $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)/2 = 0$ összefüggést használtuk. A $\lim_{u\to 0}(\sin u)/u = 1$ állítást a 2.9.6. pontban bebizonyítottuk.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0,$$

ami az állítást bizonyítja. A $\sin x$ és $\cos x$ grafikonját tekintve ez nem meglepő. Írjuk fel a $\sin x$ érintőjének egyenletét az $x_0 = 0$-ban:

$$y - \sin 0 = \cos 0(x - 0),$$

$$y = x.$$

A $\cos x$ deriváltját hasonlóan kaphatjuk meg, de most a

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

azonosságot használjuk:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} -\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin x_0.$$

3.5.3. Összeg, szorzat és hányados deriváltja

Függvény konstansszorosának deriváltja

Ha $f(x)$ deriválható, akkor $cf(x)$ is deriválható és

$$(cf(x))' = c\cdot f'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{c\cdot f(x) - c\cdot f(x_0)}{x - x_0} = c\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c\cdot f'(x_0).$$

Összeg deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható, akkor $f(x) + g(x)$ is deriválható és

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3.10. Példa. $(x^3 + x^2 + x)' = 3x^2 + 2x + 1.$

Szorzat deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható, akkor $f(x)\cdot g(x)$ is deriválható és

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)(f(x)-f(x_0)) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Itt $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, mert $g(x)$ differenciálhatósága miatt $g(x)$ folytonos is (3.1 tétel). A másik két határérték egyenlő rendre $f'(x_0)$-lal illetve $g'(x_0)$-lal f és g differenciálhatóságának feltételezése miatt.

3.11. Példa. $(x^4\sin x)' = 4x^3\sin x + x^4\cos x.$

Az $f(x)$ reciprokának deriváltja

Legyen $f(x)$ deriválható, és $f(x)\neq 0$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \frac{1}{f^2(x_0)}\Big(-f'(x_0)\Big) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Az első határérték az $f(x)$ differenciálhatóságából adódó folytonossága miatt igaz.

3.12. Példa. Bizonyítsuk be a hatvány deriválási szabályát negatív kitevő esetén:

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

A hányados deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválhatóak és $g(x)\neq 0$, akkor

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ugyanis, a szorzat és reciprok szabályok szerint

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

3.13. Példa. A $\operatorname{tg} x$ deriváltja $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k = 0 + \pm1 + \pm2 + \ldots)$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt.

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3.14. Példa. A $\operatorname{ctg} x$ **deriváltja** $x \neq k\pi \quad (k = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \ldots)$
Hasonlóan kaphatjuk a $\operatorname{ctg} x$ függvény deriváltját.

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

3.5.4. Az összetett függvény deriváltja

Tekintsük az $f(g(x))$ összetett függvényt. Tegyük fel, hogy a g differenciálható az x helyen, és f differenciálható a $g(x)$ helyen. Ekkor

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ezt a szabályt láncszabálynak is nevezzük, mert az összetett függvényt láncszerűen haladva a külső függvénytől a belsőig differenciáljuk, minden függvényt a saját argumentuma szerint.

Az igazoláshoz írjuk fel a differenciahányadost:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ahol $y = g(x)$ és $y_0 = g(x_0)$. Az első tényező az $f(y)$ differenciahányadosa y szerint, a második a $g(x)$ differenciahányadosa x-szerint. Mivel $g(x)$ differenciálható, ezért egyrészt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$$

másrészt $g(x)$ folytonos is x_0-ban. Ezért

$$\lim_{x \to x_0} \Big(g(x) - g(x_0)\Big) = \lim_{y \to y_0} \Big(y - y_0\Big) = 0.$$

Az első tényezőben kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$$

az f differenciálhatósága miatt. Összegzésképpen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

3.15. Példa. A $\sin x^2$ függvény esetén a belső függvény $y = x^2$, a külső pedig $\sin y$, ezért

$$(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x.$$

3.16. Példa. A végrehajtás sorrendjét megcserélve kapjuk a $\sin^2 x$ függvényt. Ekkor $y = \sin x$ a belső és y^2 a külső függvény. Ennek deriváltja

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

ahol $2y = 2\sin x$ a külső függvény (y^2) deriváltja.

3.17. Példa. $((x^3+1)^{10})' = 10(x^3+1)^9(3x^2)$.

3.18. Példa. Tekintsük a $(\sqrt{x})^2$ függvényt. Mechanikusan számolva kapjuk, hogy

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)' = 2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'.$$

Mivel x^2 és $\sqrt{x}$ egymás inverzei, $(\sqrt{x})^2 = x$. Ezért $((\sqrt{x})^2)' \equiv 1$. A két eredményt összevetve, kapjuk $2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)' = 1$, azaz

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x>0).$$

Megkaptuk a hatványfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt az $1/2$ kitevő esetén. A fenti gondolatmenetet általánosíthatjuk tetszőleges inverz függvényre.

3.5.5. Az inverz függvény deriváltja

A $\sqrt{x}$ deriválásának módszerét általánosan is alkalmazhatjuk az inverz deriváltjának kiszámítására.

Legyen az f függvény differenciálható az $y = \bar{f}(x)$ helyen és $f'(\bar{f}(x)) \neq 0$. Ekkor az $\bar{f}(x)$ inverz függvény is differenciálható az x helyen és

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Csak az utóbbi állítást igazoljuk. Minthogy f és $\bar{f}$ egymás inverzei, ezért

$$f\left(\bar{f}(x)\right) = x.$$

Ezt az egyenlőséget deriválva kapjuk, hogy

$$f'\left(\bar{f}(x)\right)\cdot\bar{f}'(x) = 1.$$

Innen

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Példaként már tekintettük a $\sqrt{x}$ esetét. Egy igen fontos alkalmazás lesz az exponenciális függvény deriváltjának kiszámítása.

3.5.6. A logaritmus függvény deriváltja, az $\ln x$ definíciója

Legyen $a>0, a\neq 1$, és tekintsük az $\log_a x$ függvényt. Legyen $x_0>0$ és $x = x_0 + \frac{1}{n}$. Írjuk fel a differenciahányadost az x_0 és $x_0+\frac{1}{n}$ helyekkel.

$$\frac{\log_a(x_0+\frac{1}{n}) - \log_a x_0}{\frac{1}{n}} = n\log_a\left(1+\frac{1}{n\cdot x_0}\right) = \frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{1}{n\cdot x_0}\right)^{n\cdot x_0}.$$

A határértékekről szóló 2.3. részben szemléletes jelentését adtuk az

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{és } b_n = \left(1+\frac{1}{n\cdot b}\right)^{n\cdot b} \qquad (b>0)$$

sorozatoknak.

Ott megállapítottuk, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\cdot b}\right)^{n\cdot b} = e$$

határérték. Az "e" szám irracionális, és egy közelítő értéke $e \approx 2.7182$.

Ezt a tényt és az $\log_a x$ folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{x_0 n}\right)^{x_0 n} = \log_a e.$$

Vezessük be az "e" alapú logaritmust. Ezt a $\log_e x$ *helyett* $\ln x$ *vagy* $\log x$ *jelöli,* és **természetes logaritmusnak** nevezzük. A logaritmus azonosságai miatt

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Beláttuk tehát, hogy

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

speciálisan

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Ez a hiányzó láncszem a hatványok deriváltjai között, ugyanis az $1/x$ függvény nem deriváltja egyetlen hatványfüggvénynek sem.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a differenciahányadosban $x_0 + \frac{1}{n}$ helyett tetszőleges $x = x_0 + h$ helyet kellene vennünk. Ebben az esetben is ugyanazt az eredményt kapnánk.

3.5.7. Az exponenciális függvény deriváltja, e^x, exponenciális növekedés

Az a^x exponenciális függvény minden $a > 0$ esetén értelmezve van, most legyen $a = e$. Tekintsük az e^x függvényt. e^x az $\ln x$ inverze, ezért

$$1 = \left(\ln e^x\right)' = \frac{1}{e^x}(e^x)'$$

ahonnan

$$(e^x)' = e^x.$$

Hasonlóan

$$\left(\log_a a^x\right)' = \frac{1}{a^x \cdot \ln a}(a^x)' = 1$$

miatt

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Nagyon érdekes összefüggéseket kaptunk. ***Az exponenciális függvények változásának mértéke egyenesen arányos magával a függvény értékével.*** Később látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság általános a populációk növekedésénél, nukleáris robbanásnál, lebomlásnál és sok más alkalmazásban.

Általában az olyan függvények, amelyek változási sebessége egyenesen arányos a függvény értékével, exponenciálisan növekednek ha $k > 0$, illetve csökkennek ha $k < 0$ (8. fejezet).

3.6. Lineáris közelítések

Most pontosan megfogalmazzuk az érintőnek és a szelőknek az $f(x)$-től való távolságára a bevezetőben (3.1. pont) vázolt észrevételt. Megmutatjuk, hogy ***az*** $f(x)$ ***függvényérték és az*** $(x_0, f(x_0))$ ***pontban húzott érintő*** x***-beli értékének különbsége sokkal gyorsabban tart nullához, mint minden más*** $(x_0, f(x_0))$ ***ponton átmenő egyenes esetén, ha*** $x \to x_0$. Ezért az x_0 hely közelében az $f(x)$ függvényt az érintőjével közelíthetjük:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x, \qquad (f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)).$$

Tekintsünk egy tetszőleges, az $(x_0, f(x_0)$ ponton átmenő m meredekségű egyenesre az $f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))$ különbséget. Mivel $f(x)$ folytonos, ezért

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))) = 0.$$

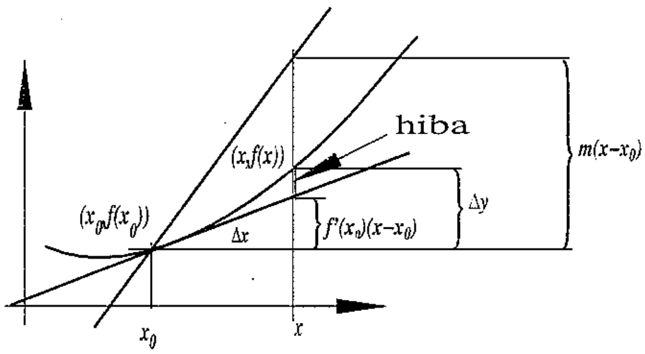
A fenti kifejezésből emeljük ki $(x - x_0)$-t:

$$f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\right)(x - x_0).$$

Ha $x \to x_0$, akkor az első tényező határértéke $f'(x_0) - m$. Ezért ha $m \neq f'(x_0)$, akkor a távolság csökkenése az $x - x_0$ csökkenésével arányos. Ha azonban $m = f'(x_0)$, akkor a távolság

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)(x - x_0),$$

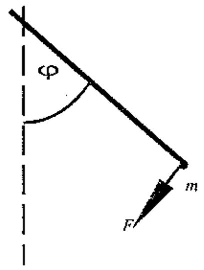
ahol mindkét tényező nullához tart, ha $x \to x_0$. Következésképpen, az érintő esetén a távolság csökkenése sokkal gyorsabb, mint más egyenesek esetén.



Megjegyezzük, hogy jó becslés adható a függvény és az érintő $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ eltérésére. Ezzel a Taylor polinomokról szóló 4.5. fejezetben foglalkozunk.

A tétel gyakorlati alkalmazásokban igen hasznos. A valós folyamatok általában bonyolult nemlineáris (nem $y = ax + b$ alakú) függvényekkel írhatók le. Ezek matematikai vizsgálata gyakran igen nehéz. Nagyon kiterjedt matematikai elmélete van ezen függvények érintővel való helyettesítésével történő vizsgálatoknak, az úgynevezett lineáris közelítéseknek.

3.19. Példa. Tekintsük a matematikai ingát.



Azt tanultuk, hogy a lengő tömegpontra ható érintő-irányú erő kis kitérés esetén egyenesen arányos a φ kitérési szöggel, az erő a kitéréssel ellentétes irányú. Valójában az erő $\sin\varphi$-vel arányos, de ennek vizsgálata igen bonyolult. A $\sin x$ függvény érintője az $x_0 = 0$ pontban az $y = x$ egyenes. Tételünk felhasználásával kapjuk, hogy ha x kicsi, akkor $\sin x \approx x$.

Ezért mondhatjuk a matematikai inga esetén, hogy *kis kitérések* esetén a visszatérítő erő közel egyenesen arányos a kitérés szögével.

3.20. Példa. Adjunk lineáris közelítést a $\sin 46^o$ értékére. A legközelebbi szög, amelynek szinuszát ismerjük a $45^o = \pi/4$. A $\sin x$ érintője a $\pi/4$ helyen

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(x - \pi/4)}{\sqrt{2}}$$

Ebbe behelyettesítve az $x = 46^o \approx 0.802851\,rad$ értéket, kapjuk az $y_0 = 0.719448$ lineáris közelítést. Ellenőrizhető, hogy $\sin 46^o - y_0 \approx -0.000108$.

3.7. Magasabb rendű deriváltak

Általában, ha egy $f(x)$ deriválható függvény deriváltja $f'(x)$ is deriválható függvény, akkor ennek deriváltját $(f'(x))' = f''(x)$-t a függvény **második deriváltjának** nevezzük. *A függvényt ekkor kétszer deriválhatónak mondjuk.*

Ha a *második derivált is deriválható, akkor azt mondjuk, hogy a függvény háromszor deriválható*, és a **harmadik deriváltja** $f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))'$.

Továbbá, *ha egy $f(x)$ függvény deriváltjai léteznek az $1, 2, 3, \ldots, n$ esetben, azaz az $f^{(n-1)}(x)$ is deriválható függvény, akkor ennek deriváltját $(f^{(n-1)}(x))'$-t a függvény* **n-ik deriváltjának** *nevezzük.* Ennek jelölése $f^{(n)}(x)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a függvény n-szer deriválható.

Ha a függvény akárhányadik deriváltja is létezik, akkor azt mondjuk, hogy a függvény végtelenszer deriválható. Ilyen például az e^x. A magagasabb rendű deriváltak hasznát a későbbiekben látni fogjuk.

3.21. Példa. $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$. Továbbá, $(x^3)^{(4)} = 0$. Általában minden $P_n(x)$ polinom végtelen sokszor deriválható, de az $(n+1)$-ik derivált már azonosan nulla.

3.22. Példa. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$ és $(\sin x)^{(4)} = \sin x$.

3.8. A derivált fizikai jelentése, sebesség, gyorsulás

Tekintsük az $s(t)$ útfüggvény által leírt mozgást. Valamely $t_0 < t_1$ időpillanatok között a test által megtett út $s(t_1) - s(t_0)$. A test **átlagsebessége** a t_0 és t_1 időpillanatok között

$$v(t_0, t_1) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A test mozgásának pillanatnyi változásának jellemzésére bevezetjük a t_0-beli **pillanatnyi sebesség** fogalmát, amit a

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

határértékkel definiálunk. *A pillanatnyi sebesség $v(t)$ függvénye az $s(t)$ útfüggvény differenciálhányadosa.*

Ha például $s(t) = gt^2/2$ szabadeséssel van dolgunk, akkor $v(t) = gt$, ami a kísérleti eredményekkel megegyezik.

Hasonló eredményt kapunk a $v(t)$ *sebesség változásának mértékét, a gyorsulást* vizsgálva is. A t_0, t_1 pillanatok közötti átlagos gyorsulás

$$a(t_0, t_1) = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A pillanatnyi gyorsulás pedig

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

A pillanatnyi gyorsulás tehát a sebességfüggvény differenciálhányadosa, az útfüggvény második deriváltja. Példánkban $a(t) = (gt)' = g$. Ha a mozgó test m tömege nem változik, akkor Newton második törvénye

$$m \cdot s''(t) = F(t)$$

alakban írható, ahol F a ható erő.

4. A differenciálszámítás alkalmazásai

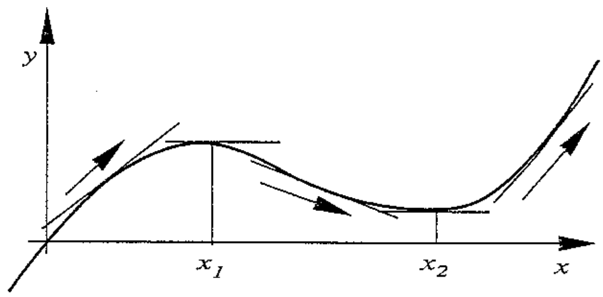
Az előző fejezetben a differenciálhányadost, mint a függvény változásának mértékét, a függvény meredekségét definiáltuk. Ebben a fejezetben az $f(x)$ és deriváltja közti mélyebb összefüggéseket vizsgálunk. Először a deriváltat az $f(x)$ szélsőértékeinek keresésére és a növekedés vizsgálatára használjuk, majd a függvény konvexitását jellemezzük a derivált segítségével. Ezután határozatlan ∞/∞ és $0/0$ alakú határértékekkel foglalkozunk. Végül pedig pontosítjuk a 3.6. fejezetben vázolt lineáris közelítés technikáját.

4.1. Monotonitás és szélsőértékek

A vegyész a kémiai reakció vizsgálatánál keresi azt a hőmérsékletet, amelynél a reakció a leggyorsabb. A gyógyszerész a gyógyszer hatásának vizsgálatánál azt az adagolást keresi, amely mellett a gyógyhatás–mellékhatás viszony maximális, illetve a költségek minimálisak. A "cost–benefit" (ráfordítás-nyereség) viszony minimalizálása mindennapi életünk része. Ezek a problémák matematikailag függvények szélsőértékének keresésére vezethetők vissza.

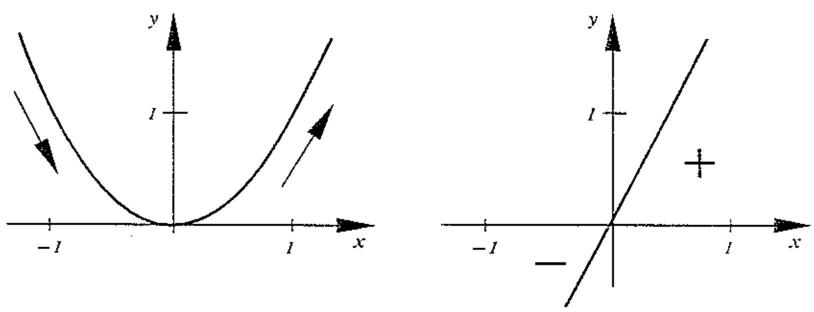
Az orvost influenzajárvány esetén érdekli, hogy növekszik vagy csökken a betegek száma, a járvány terjed vagy visszaszorulóban van. A bankár igencsak fontosnak tartja, hogy bevételei növekednek vagy csökkennek. Ezek a problémák függvények monotonitási tulajdonságainak vizsgálatát igénylik.

A derivált fogalma alapvető eszköz a fenti gyakorlati problémák vizsgálatában. Az $y = mx+b$ egyenes $m > 0$ esetén monoton növő, $m < 0$ esetén csökkenő, $m = 0$ esetén pedig konstans. Az $f(x)$ differenciálható függvényre hasonlót állíthatunk. Tekintsük az alábbi függvényt és érintőjét néhány pontban:



Vegyük észre, hogy az x_1 pont előtt és x_2 után a függvény növő, és az érintők meredeksége pozitív. Az x_1 és x_2 pontok között a függvény csökken, az érintők meredeksége negatív. Az x_1 pontban maximum, az x_2 pontban minimum van, az érintők itt párhuzamosak az x-tengellyel.

A grafikus példa mellett tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt. Ennek deriváltja $f'(x) = 2x$.



A grafikonról leolvasható, hogy x^2 csökkenő, ha $x < 0$. Itt $f'(x) = 2x < 0$. Ugyanakkor x^2 növő, ha $x > 0$ ($f'(x) = 2x > 0$). Az $x = 0$-ban minimum van ($f'(x) = 0$). Ezek után már egyáltalán nem lesznek meglepőek tételeink. Észrevételeink általános érvényűek lesznek.

4.1.1. Monotonitás

Ismételjük át a monotonitás definícióit.

Az $< a, b >$ *intervallumon a* $f(x)$ *függvény* nemcsökkenő , *ha bármely* $x_1, x_2 \in < a, b >$ *esetén* $x_1 < x_2$ *egyenlőtlenségből* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *következik.*

Az $f(x)$ *függvény* nemnövő, *ha bármely* $x_1 < x_2$ $(\in < a, b >)$ *esetén* $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Az $< a, b >$ *intervallumon a* $f(x)$ *függvény* szigorúan monoton növő, *ha bármely* $x_1, x_2 \in < a, b >$ *esetén* $x_1 < x_2$ *egyenlőtlenségből* $f(x_1) < f(x_2)$ *következik.*

Az $f(x)$ *függvény* szigoúan monoton csökkenő, *ha bármely* $x_1 < x_2$ $(\in < a, b >)$ *esetén* $f(x_1) > f(x_2)$.

Most fogalmazzuk meg pontosan a monotonitás és a derivált kapcsolatát.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f(x)$ *differenciálható az* (a, b) *véges vagy végtelen intervallumon.*

1. *Az* $f(x)$ *függvény nemcsökkenő az* (a, b) *intervallumon akkor és csakis akkor, ha* $f'(x) \geq 0$ *az* (a, b) *intervallumon.*

2. *Az* $f(x)$ *függvény nemnövő az* (a, b) *intervallumon akkor és csakis akkor, ha* $f'(x) \leq 0$ *az* (a, b) *intervallumon.*

3. *Az* $f(x)$ *függvény konstans az* (a, b) *intervallumon akkor és csakis akkor, ha* $f'(x) = 0$ *az* (a, b) *intervallum minden pontjában.*

Ha az intervallum zárt, akkor a végpontokban a féloldali deriváltakat tekintjük.

4.1. Megjegyzés. A derivált akkor is lehet nulla, ha a függvény szigorúan monoton (lásd az $f(x) = x^3$ függvényt).

Ugyanakkor, az alábbi bizonyítást követve belátható, hogy ha $f'(x) > 0$ az (a, b) intervallumon, akkor ott $f(x)$ szigorúan monoton növő. Ha $f'(x) < 0$ az (a, b) intervallumon, akkor ott $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítsuk be a tételt.

Először megmutatjuk, hogy ha $f(x)$ nemcsökkenő (a, b)-n, akkor $f'(x) \geq 0$ az (a, b) minden pontjában. Legyen $x_0 \in (a, b)$. Mivel $f(x)$ nemcsökkenő, ezért $f(x) \leq f(x_0)$ ha $x < x_0$ és $f(x) \geq f(x_0)$ ha $x > x_0$. A differenciahányados nemnegatív az x_0 pontban:

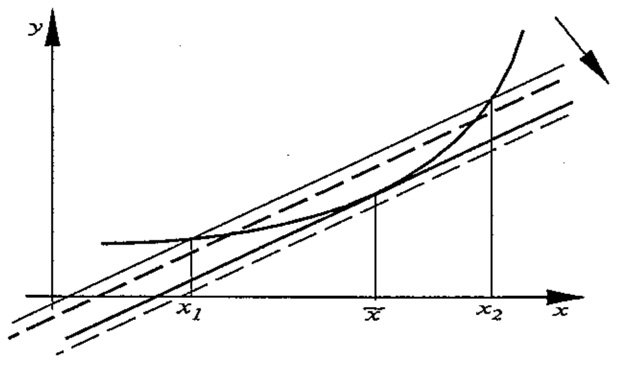
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

mert, ha $x < x_0$, akkor a számláló nempozitív, a nevező negatív. Ha pedig $x > x_0$, akkor a számláló nemnegatív, a nevező pozitív. Ezért

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Ugyanis, ha a határérték negatív lenne, akkor a hozzá közeledő differenciahányados is negatívvá válna, ami ellentmondana a növekedés feltételének.

Fordítva, most belátjuk, hogy ha $f'(x) \geq 0$ az (a, b) intervallumon, akkor ott $f(x)$ nemcsökkenő. Legyen $x_1 < x_2$ az (a, b) intervallum tetszőleges két pontja. Szeretnénk belátni, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$. Tegyük a következőt! Húzzunk szelőt az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon keresztül. Vegyük a szelővel párhuzamos egyeneseket. Ezek között találunk legalább egyet, amelyik érinti a függvény grafikonját, azaz van olyan $\tilde{x}$ pont x_1 és x_2 között, hogy az $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ ponthoz húzott érintő párhuzamos az adott szelővel (A pontos bizonyítást mellőzzük).



Ekkor viszont a szelő és a $\tilde{x}$-beli érintő meredeksége megegyezik,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\tilde{x}) \geq 0$$

a feltétel miatt. Innen azonnal adódik, hogy $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ha $f'(\tilde{x}) > 0$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$.

A nemnövő esetben a bizonyítás mindkét részében az egyenlőtlenségek iránya megfordul.

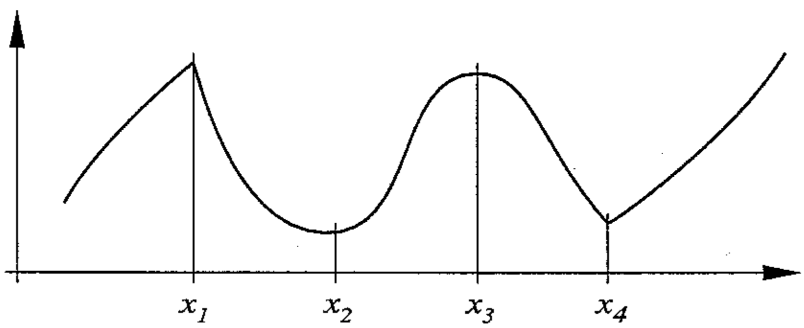
A konstans függvényre vonatkozóan, ha $f(x)$ konstans, deriváltja nyilvánvalóan nulla. Fordítva, ha a derivált azonosan nulla, akkor a függvény konstans. Ugyanis, ha nem így lenne, akkor léteznének $x_1 < x_2$ helyek, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ekkor az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon át húzott szelő meredeksége nem nulla. A fenti grafikus eljárást követve találnánk olyan helyet, amelyben a függvény deriváltja nem lenne nulla.

4.1.2. Lokális szélsőértékek

Legyen az $f(x)$ függvény folytonos az (a, b) intervallumon.

Az $x_0 \in (a, b)$ pontban az $f(x)$ függvénynek lokális minimuma van, ha van olyan x_0-t körülvevő $(c, d) \subset (a, b)$ $(x_0 \in (c, d))$, hogy bármely $x \in (c, d)$ pontra $f(x) \geq f(x_0)$. Az x_0-t lokális minimumhelynek nevezzük.

Az $x_0 \in (a, b)$ pontban az $f(x)$ függvénynek lokális maximuma van, ha van olyan x_0-t körülvevő $(c, d) \subset (a, b)$ $(x_0 \in (c, d))$, hogy bármely $x \in (c, d)$ pontra $f(x) \leq f(x_0)$. Az x_0-t lokális maximumhelynek nevezzük. A jellemző szituációkat mutatja az alábbi ábra.



Látható, hogy lényeges különbség van az x_1 és x_3 maximumhelyek illetve az x_2 és x_4 minimumhelyek között. Az x_1 és x_4 pontokban a függvény nem differenciálható. Mindegyik esetben igaz azonban az alábbi megállapítás.

4.2. Tétel. *Ha az $f(x)$ valamely x_0 pontban növekedésből csökkenésbe vált, ott lokális maximuma, ha csökkenésből növekedésbe megy át, akkor lokális minimuma van.*

Ugyanis az első esetben, ha $x < x_0$, akkor a növekedés miatt $f(x) \leq f(x_0)$. Ha $x > x_0$, akkor pedig a csökkenés miatt $f(x) \leq f(x_0)$. Hasonlóan érvelhetünk a második esetben is.

Vegyük észre, hogy megfontolásaink során csak a folytonosság fogalmát használtuk. Ha a függvény deriválható is, a monotonitás és a derivált közti összefüggéseket felhasználva, jól használható kritériumot kapunk lokális szélsőérték megkeresésére.

4.1.3. Differenciálható függvény szélsőértéke

Legyen most az $f(x)$ differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, és legyen $x_0 \in (a, b)$. Tegyük fel, hogy x_0-ban $f(x)$-nek lokális maximuma van. Ha x elég közel van x_0-hoz és,

$$\text{ha } x < x_0, \text{ akkor } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ ha pedig } x > x_0, \text{ akkor } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

mivel $f(x_0)$ lokális maximum, és ezért $f(x) \leq f(x_0)$. Innen adódik, hogy

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \text{ és } \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Mivel $f(x)$ differenciálható x_0-ban, ez csak úgy lehet, ha $f'(x_0) = 0$.

Beláttuk az alábbi nagyon fontos tételt:

4.3. Tétel. *Ha $f(x)$ differenciálható x_0-ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor*

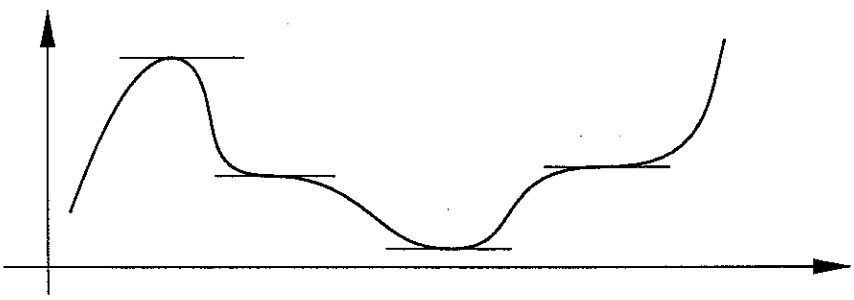
$$f'(x_0) = 0.$$

4.2. Megjegyzés. *A megfordítás nem igaz. $f'(x_0) = 0$ nem vonja maga után, hogy x_0 szélsőértékhely.* Ugyanis például az x^3 deriváltja $3x^2$, amely 0 az $x = 0$ pontban, ugyanakkor az x^3 függvénynek a 0-ban nincs se minimuma, se maximuma.

Az mindenesetre igaz, hogy a szélsőértékhelyeket az

$$f'(x) = 0$$

egyenlet megoldásai között kell keresnünk. Ezen egyenlet megoldásait **kritikus helyeknek** *nevezzük.* A lehetséges eseteket láthatjuk az alábbi ábrán.



4.3. Megjegyzés. A kritikus helyek közti intervallumokon $f'(x) \neq 0$, ezért ott $f(x)$ monoton.

A 4.2 tételt használva kapjuk az alábbi eredményt.

4.4. Tétel. *Legyen $f(x)$ differenciálható az $[a, b]$ szakaszon, és legyen $x_0 \in (a, b)$ kritikus hely.*

1. *Ha $f'(x) > 0$ $x < x_0$ esetén, és $f'(x) < 0$ $x > x_0$ esetén, akkor $f(x)$-nek x_0-ban lokális maximuma van.*

2. *Ha $f'(x) < 0$ $x < x_0$ esetén, és $f'(x) > 0$ $x > x_0$ esetén, akkor $f(x)$-nek x_0-ban lokális minimuma van.*

3. *Ha $f'(x)$ nem vált előjelet, akkor x_0 nem lehet szélsőértékhely.*

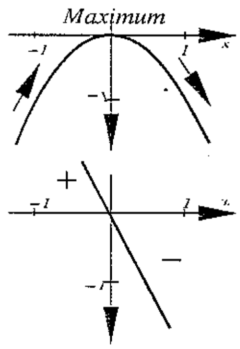
Eljárás a szélsőértékek és monoton szakaszok meghatározására

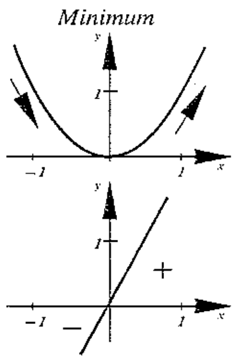
A fentiek alapján könnyű eljárást adnunk a szélsőértékek és monoton szakaszok megkereséséhez.

1. lépés. Meghatározzuk az $f(x)$ függvény kritikus helyeit az (a, b) intervallumon. Ha $f'(x) = 0$ teljesült egy egész intervallumon, akkor vegyük ennek a végpontjait. Kiszámítjuk a függvényértékeket ezekben a pontokban.

2. lépés. A kritikus helyek az (a, b) szakaszt részintervallumokra osztják. Megállapítjuk a derivált előjelét ezen részitervallumokon grafikusan, vagy mindegyik intervallum egy tetszőleges pontjában (tesztpontban) a derivált képletébe való behelyettesítéssel. Ezen részintervallumokon a derivált előjele nem változik. A függvény monotonitását a 4.1 tétel szerint állapítjuk meg.

3. lépés. Ha a derivált előjelet vált valamely kritikus helyen, ott lokális szélsőérték van (4.4 tétel).





Annak az esetnek a megfontolását, amikor $f'(x) = 0$ teljesül egy egész intervallumon, az olvasóra bízzuk.

Következtetéseink áttekinthetőbbek, ha adatainkat és következtetéseinket táblázatos formában kezeljük. A táblázat használatát a példák során mutatjuk be.

4.1. Példa. Legyen $f(x) = e^{-x^2}$. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Az $f'(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x_0 = 0$. Könnyen látható, hogy ha $x < 0$, akkor $f'(x) > 0$ ($f(x)$ növő) és ha $x > 0$, akkor $f'(x) < 0$ ($f(x)$ csökkenő).

Készítsünk táblázatot:

	$x < 0$	0	$x > 0$
$f(x)$	↗	MAX=1	↘
$f'(x)$	+	0	−

A nyert tulajdonságok fontosak, de nem elegendőek ahhoz, hogy a függvény grafikonját felrajzoljuk. Ehhez a következő fejezetek vizsgálatai szükségesek.

4.2. Példa. Klasszikus feladat adott hosszúságú kerítéssel a legnagyobb területű téglalap alakú kertet bekeríteni. Az egyszerűség kedvéért, legyen a kerület 2. A téglalap oldalai nyilván x és $1 - x$. Ekkor

$$T = x(1 - x).$$

A területnek szélsőértéke van, ha

$$T'(x) = 1 - 2x = 0,$$

mivel a derivált előjelet is vált. Innen $x = 1/2$, vagyis a kert négyzet alakú. Az eredményt elemi úton az $y = x(1 - x)$ parabola közvetlen felrajzolásával is megkaphatjuk.

4.3. Példa. Legyen $f(x) = x^3/3 - 2x^2 - 5x + 4$. Keressük a szélsőértékhelyeket és vizsgáljuk meg a monotonitást. A derivált

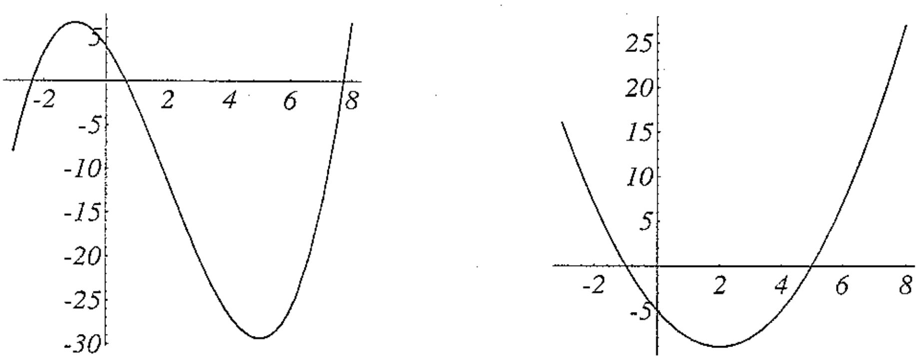
$$f'(x) = x^2 - 4x - 5.$$

Az $x^2 - 4x - 5 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

A kritikus helyek közt a derivált előjele a parabola ismeretében azonnal meghatározható. Észrevételeinket foglaljuk táblázatba!

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 5$	5	$5 < x$
$f(x)$	$\nearrow$	$\text{MAX} = \frac{20}{3}$	$\searrow$	$\text{min} = -\frac{88}{3}$	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Tehát $x_1 = -1$-ben maximum, míg $x_2 = 5$-ben minimum van. A függvény és a derivált grafikonja:



4.1.4. Szélsőérték töréspontban

Az előző pont megállapításai nem alkalmazhatók, ha az $f(x)$ függvény az x_0 pontban nem deriválható. De ha x_0 előtt és után igen, akkor a függvény monotonitását x_0 előtt és után a derivált előjelével ellenőrizhetjük, és következtethetünk arra, hogy x_0 szélsőértékhely-e. Bővítsük ki a kritikus helyek körét a töréspontokkal. Ekkor a 4.2 tétel továbbra is érvényes marad. A szélsőértékek és monoton szakaszok megtalálására adott eljárás változatlanul alkalmazható. Az eljárást példán keresztül mutatjuk be.

4.4. Példa. Legyen $f(x) = |x^2 - 1|$. Keressük a szélsőértékhelyeket és vizsgáljuk meg a monotonitást. Az abszolút érték definíciója miatt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le -1 \\ -(x^2 - 1), & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, & 1 \le x. \end{cases}$$

A függvény a $-1, 1$ helyeken nem differenciálható. Egyéb helyeken a deriváltja

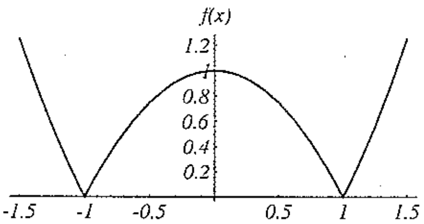
$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \\ -2x, & -1 < x < 1 \\ 2x, & 1 < x. \end{cases}$$

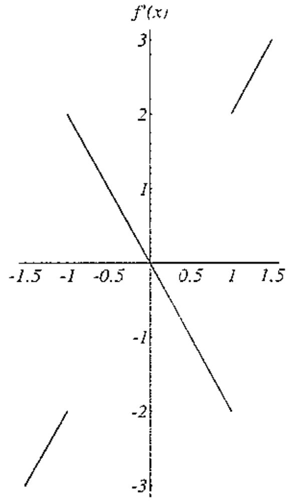
Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása az $x = 0$ pont. A kritikus helyek nagyság szerint rendezve: -1, 0, 1.

A kritikus helyek közt a derivált előjele a parabola ismeretében azonnal meghatározható. Készítsünk táblázatot!

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$0 < x < 1$
$f(x)$	$\searrow$	min $= 0$	$\nearrow$	MAX $= 1$	$\searrow$	min $= 0$	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	$\otimes$	$+$	0	$-$	$\otimes$	$+$

A függvény és a derivált grafikonja:





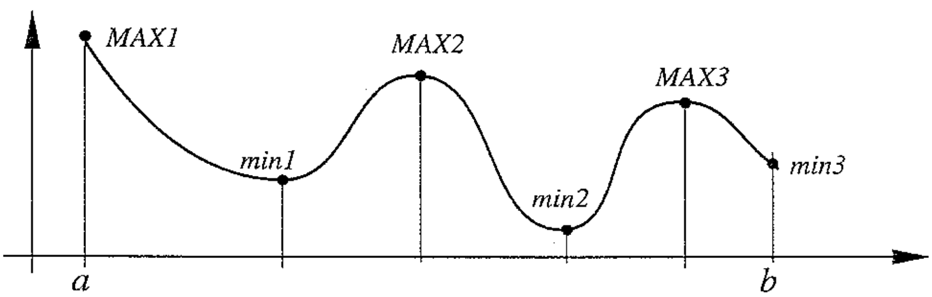
4.1.5. Globális szélsőértékek

Legyen $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

Az $x_0 \in [a, b]$ *pontban az* $f(x)$ *függvénynek globális minimuma van, ha minden* $x \in [a, b]$ *esetén* $f(x) \geq f(x_0)$.

Az $x_0 \in [a, b]$ *pontban az* $f(x)$ *függvénynek globális maximuma van, ha minden* $x \in [a, b]$ *esetén* $f(x) \leq f(x_0)$.

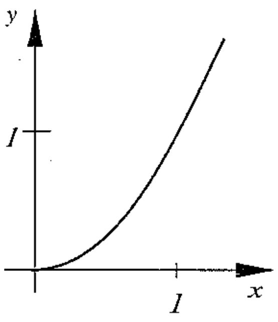
Könnyű belátni, hogy az $f(x)$ függvény globális maximuma az $[a, b]$ intervallumon a lokális maximumok és az $f(a), f(b)$ értékek maximuma. Hasonlóan, az $f(x)$ függvény globális minimuma az $[a, b]$ intervallumon a lokális minimumok és az $f(a), f(b)$ értékek minimuma.

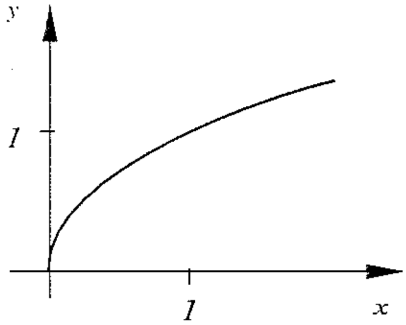


Az ábrán $MAX1$ globális maximum és $min2$ globális minimum. Az előző pont példájában vizsgált $f(x)$ függvénynek az $x = -1$ és $x = 1$ helyeken lokális minimuma van, amelynek értéke 0. Ezek a függvény globális minimumhelyei az egész $\mathbf{R}$ halmazon. Az $x = 0$-ban lokális maximum van, ennek értéke 1. De például a $[-1.5, 1.5]$ intervallumon a függvény globális maximuma 1.25 és azt az intervallum végpontjaiban veszi fel.

4.2. A konvexitás és a deriváltak kapcsolata

Tekintsük most az x^2 és a $\sqrt{x}$ függvényeket, ha $x > 0$. Bár mindkettő monoton növő, növekedésük jellege teljesen különbözik.

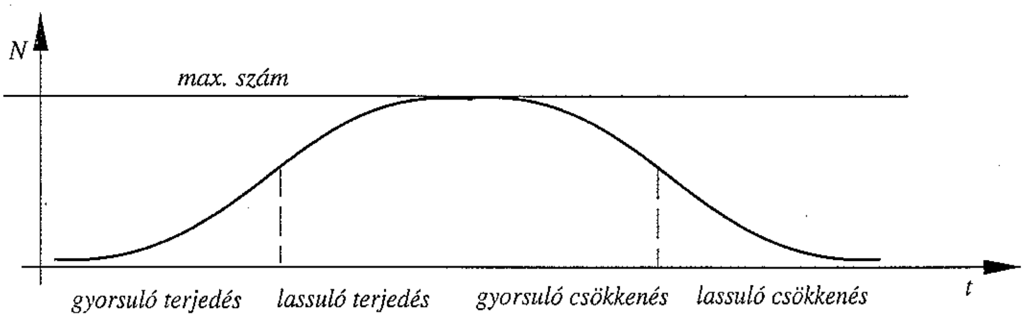




Ugyanis, az x^2 esetén az x növekedésével a függvény meredeksége egyre nagyobb, a függvény egyre gyorsabban nő, a derivált $(x^2)' = 2x$ monoton növekszik. Éppen fordított a helyzet a $\sqrt{x}$ esetén. Itt a növekedés mértéke egyre kisebb, a függvény egyre lassabban nő. A derivált $(1/(2\sqrt{x}))$ csökken az x növekedésével.

Tekintsünk egy gyakorlati példát, egy járvány lefolyásának folyamatát. A kezdeti szakaszban könnyen találni nem fertőzött egyedeket, ezért a terjedés egyre gyorsabb (agresszív növekedés!). Egy idő után, már (majdnem mindenki fertőzött), a fertőzöttek számának növekedése lelassul, és ez nem haladhatja meg az összes egyed számát. A járvány megszűnése hasonlóképpen játszódik le. A betegek száma először lassan de egyre gyorsabban csökken. Végül a csökkenés újra lelassul.

Egy ilyen folyamatot láthatunk az alábbi ábrán.



A járvány mértékének és terjedésének az elemzéséhez igen fontos a gyorsuló növekedésű és lassuló növekedésű szakaszok megkülönböztetése.

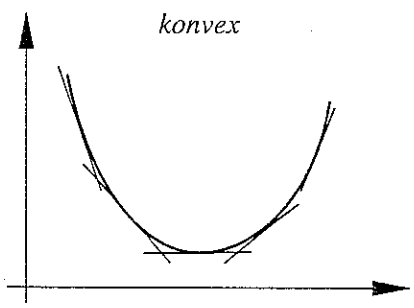
Írjuk le a tekintett tulajdonságokat matematikai szabatossággal.

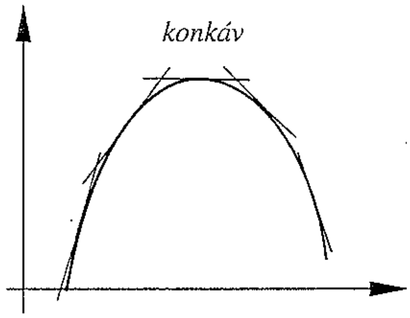
4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ differenciálható függvény konvex az $< a, b >$ intervallumon, ha differenciálhányadosa, $f'(x)$, monoton nemcsökkenő.*

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ konkáv, ha a deriváltja monoton nemnövő $< a, b >$-n.

Bebizonyítható, hogy a definíció ekvivalens az alábbi grafikus definícióval.

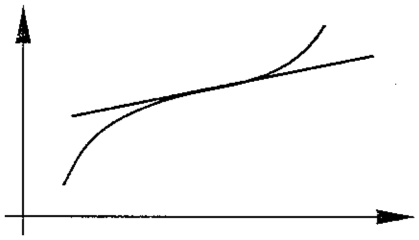
4.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ differenciálható függvény konvex az $< a, b >$ intervallumon, ha grafikonjának bármely pontban húzott érintője a grafikon alatt helyezkedik el. A differenciálható $f(x)$ függvény konkáv az $< a, b >$ intervallumon, ha grafikonjának bármely pontban húzott érintője a grafikon felett helyezkedik el.*

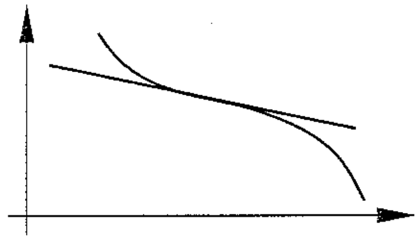




Fontos megjegyeznünk, hogy a monotonitás és konvexitás egymástól független tulajdonságok. A járványterjedést mutató ábrán konvex-növő, konkáv-növő, konkáv-csökkenő és konvex-csökkenő szakaszok követik egymást. Ezen szakaszok találkozási pontjainak fontos szerepe van.

4.3. Definíció. *Azokat a helyeket, ahol $f(x)$ konvexből konkávba vált, vagy fordítva, inflexiós pontoknak nevezzük.*





A konvexitás második definíciója alapján az inflexiós pontban húzott érintő ebben a pontban metszi a függvény grafikonját.

A konvexitás problémáját a derivált monotonitásának vizsgálatával oldhatjuk meg. Szükségünk lesz a derivált deriváltjára, azaz $f(x)$ második deriváltjára $(f'(x))' = f''(x)$ (Lásd a 3.7. fejezetet!).

A monotonitásra vonatkozó tételek felhasználásával kapjuk az alábbi állításokat.

4.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható $< a, b >$-n. Ha az intervallum zárt, a végpontokban a féloldali deriváltakat vesszük.*

Ha $f(x)$ konvex, akkor $f''(x) \geq 0$ $< a, b >$-n. Ha $f''(x) \geq 0$, akkor $f(x)$ konvex $< a, b >$-n.
Ha $f(x)$ konkáv, akkor $f''(x) \leq 0$ $< a, b >$-n. Ha $f''(x) \leq 0$, akkor $f(x)$ konkáv $< a, b >$-n.

Ha x_0 az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja, akkor $f''(x_0) = 0$. Ha $f''(x_0) = 0$, és $f''(x)$ előjelet vált x_0-ban, akkor ott inflexiós pont van.

Eljárás konvex és konkáv szakaszok meghatározására

1. lépés. Meghatározzuk az $f''(x) = 0$ egyenlet gyökeit.

2. lépés. A gyökök az $< a, b >$ szakaszt részintervallumokra osztják. Ha $f''(x) = 0$ teljesül valamely intervallumon, akkor vegyük osztópontnak a végpontokat. Megállapítjuk $f''(x)$ előjelét ezen részintervallumokon.

3. lépés. Ha $f''(x)$ előjelet vált valamely pontban, ott inflexiós pont van. Azokon az intervallumokon, ahol $f''(x)$ pozitív, a függvény konvex, ahol negatív, ott konkáv. Ha $f''(x) = 0$ teljesül valamely intervallumon, ott a függvény egy egyenes.

Komplex problémák esetén összekapcsoljuk a monotonitás és a konvexitás vizsgálatát. Ekkor az $[a, b]$ intervallum osztópontjai a kritikus helyek és az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai lesznek.

4.5. Példa. Alkalmazzuk eredményeinket az $f(x) = e^{-x^2}$ függvényre. Egészítsük ki az előző pontban kapott eredményeket:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

Az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bővítsük ki a táblázatot az $f''(x)$ sorával.

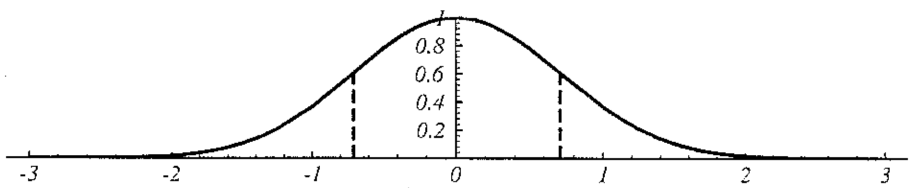
	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x$
$f(x)$	$\nearrow$	Infl.p.	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	Infl.p.	$\searrow$
$f'(x)$	$\nearrow, +$	MAX	$\searrow, +$	0	$\searrow, -$	min	$\nearrow, -$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Tételeinket felhasználva, ha $x < -\sqrt{2}/2$, akkor $f'(x)$ pozitív és növő, ezért $f(x)$ konvex növő. Ha $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$, $f'(x)$ csökkenő ezért $f(x)$ konkáv. Ezen belül, ha $x < 0$, akkor konkáv növő, $x > 0$ esetén konkáv csökkenő. Ha $x > \sqrt{2}/2$, akkor $f(x)$ konvex csökkenő.

Általában is érdemes megjegyezni az alábbi kis táblázatot:

$f(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$		
$f''(x) < 0$		

A rácsokban $f(x)$ képe található. Táblázatunk alapján már könnyű felrajzolni az e^{-x^2} függvény grafikonját. Csupán azt kell észrevennünk, hogy $e^{-x^2} > 0$ és $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$. A $\pm\sqrt{2}/2$ pontok a függvény inflexiós pontjai. Ezért a grafikon az alábbi:



4.3. Függvények menetének összehasonlítása, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ alakú határértékek, L'Hospital szabály

A 2.9.3. fejezetben foglalkoztunk függvények menetének összehasonlításával és határozatlan határértékek kiszámításával. Ott még csak a racionális törtfüggvényekkel tudtunk foglalkozni, és meghatároztuk a $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ határértéket. A bonyolultabb esetek vizsgálatához még nem állt rendelkezésünkre a szükséges matematikai apparátus. A L'Hospital szabály segít az általánosabb esetekben.

4.6. Tétel. *(L'Hospital szabály) Legyenek f és g differenciálhatók x_0-ban és környezetében (egy intervallumon, amely belsejében tartalmazza x_0-t).*

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\ (\infty); \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\ (\infty),$$

és $g'(x) \neq 0$ az x_0 közelében. Ekkor, ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textit{létezik},$$

akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

is létezik, és a két határérték megegyezik.

Az állítás akkor is igaz, ha $x_0 = \pm\infty$ vagy féloldali határértékek esetén. Ekkor a függvények differenciálhatóságának valamely megfelelő féloldali környezetben kell teljesülni.

4.6. Példa. A L'Hospital szabállyal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} &= \lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \\
\lim_{x\to 0+0} x \ln x &= \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Általában igaz, hogy ha $P(x)$ tetszőleges polinom, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{P(x)} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0,$$

és

$$\lim_{x\to 0+0} x^n \ln x = 0.$$

Ezen állítások igazolását az olvasóra bízzuk.

4.7. Példa. A 2.9.1. pontban a rendőrelvet alkalmazva megmutattuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Erre az esetre azonban nem alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt, mert a számláló határértéke $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nem is létezik.

4.4. Függvények grafikonjának rajzolása, a függvényvizsgálat lépései

Függvényvizsgálat alatt mindazon módszerek, eljárások alkalmazását értjük, amelyekkel a függvény viselkedése, tulajdonságai meghatározhatók, grafikonja felrajzolható. Az eddigiekben számos módszert ismertettünk a különböző tulajdonságok vizsgálatára. Most ezeket összefoglaljuk és egy példán bemutatjuk.

1. lépés. Az értelmezési tartomány meghatározása.

2. lépés. Zéróhelyek keresése, a függvény előjelének meghatározása.

3. lépés. Speciális tulajdonságok, pl. szimmetrikusság, periodicitás, tengelymetszetek keresése. Ezek sokat segítenek a grafikon pontosabb megrajzolásában és a függvény által leírt folyamat megismerésében.

4. lépés. Folytonosság, szakadási helyek, határértékek az értelmezési tartomány határainál, differenciálhatóság, töréspontok vizsgálata.

5. lépés. Monotonitás, szélsőértékhelyek: $f'(x)$ meghatározása, $f'(x) = 0$ megoldása, $f'(x)$ előjelének vizsgálata, a 4.1.3. pontban leírt eljárás szerint.

6. lépés. Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = 0$ megoldása, $f''(x)$ előjele, konvex, konkáv szakaszok keresése a 4.2. pontban leírt eljárás szerint.

7. lépés. Összefoglaló táblázat készítése a 4.1. és 4.2. pontok példái során megismert formában. A táblázat sorai legyenek: f, f', f''. Az oszlopok pedig nagyság szerint rendezve minden spec. hely: szakadások, töréspontok, az $f'(x) = 0$, $f''(x)=0$ egyenletek megoldásai és a köztük levő intervallumok.

8. lépés. A táblázat alapján a függvény grafikonjának felvázolása.

4.8. Példa. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}e^{x^2}$ függvényt. Vizsgáljuk meg a függvény viselkedését a fenti séma szerint.

1. lépés. Az értelmezési tartomány a $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmaz.

2. lépés. Az $f(x)$ függvénynek nincs zéróhelye. A számláló mindig pozitív. A nevező negatív, ha $x < 0$ és pozitív, ha $x > 0$.

3. lépés. A számláló páros, a nevező páratlan, így $f(x)$ páratlan (szimmetrikus az origóra nézve).

4. lépés. $f(x)$ folytonos az értelmezési tartományán (lásd a 2.6. pont megállapításait). A határértékek pedig:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0} \frac{e^{x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} e^{x^2} \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty \\
\lim_{x\to 0+0} \frac{e^{x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} e^{x^2} \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = 1 \cdot \infty = \infty \\
\lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^{x^2}}{x} &= \lim_{x\to \pm\infty} \frac{(e^{x^2})'}{(x)'} = \lim_{x\to \pm\infty} 2xe^{x^2} = \pm\infty
\end{aligned}$$

Az utolsó határértéknél a L'Hospital szabályt használtuk.

5. lépés. Az első derivált:

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$$

és az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$. A derivált negatív a két zéróhely között és pozitív kívül, mivel a deriváltban csak a $2x^2 - 1$ tényező vált előjelet.

6. lépés. A második derivált egyszerűsítések után:

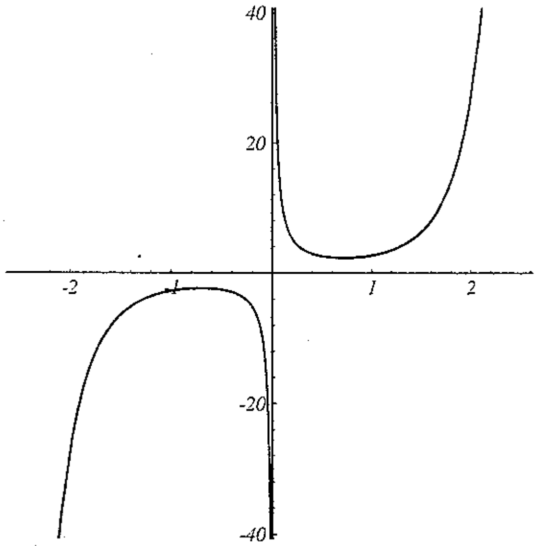
$$f''(x) = \frac{2e^{x^2}(2x^4 - x^2 + 1)}{x^3}.$$

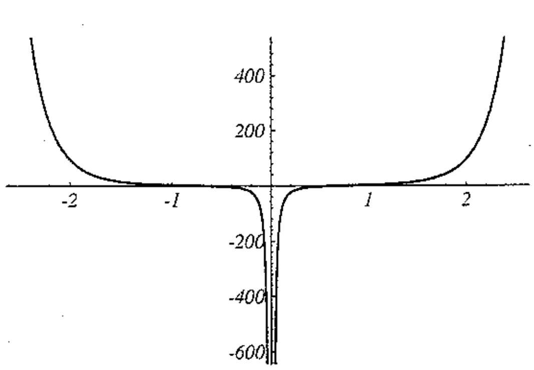
A számlálónak nincs zéróhelye, mindenütt pozitív. A nevező negatív, ha $x < 0$ és pozitív, ha $x > 0$.

7. lépés. Összefoglaló táblázat az adatokról:

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	0	$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
$f(x)$	$\nearrow$	$\text{MAX} = -\sqrt{2e}$	$\searrow$	$\otimes$	$\searrow$	$\min = \sqrt{2e}$	$\nearrow$
$f'(x)$	$\searrow, +$	0	$\searrow, -$	$\otimes$	$\nearrow, -$	0	$\nearrow, +$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\otimes$	$+$	$+$	$+$

8. lépés. Befejezésül, a függvény és deriváltjának grafikonja:





4.5. Függvények közelítése, Taylor polinomok, Taylor sorok

A derivált egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő egyenesek $(y - y_0 = m(x - x_0))$ közül a differenciálható $f(x)$ függvényt az $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ egyenletű érintő közelíti legpontosabban az x_0 közelében (3.6. pont). Ezért itt az $f(x)$ függvényt kis hibával helyettesíthetjük az érintővel (3.6. fejezet). Ez különösen hasznos az olyan nehezen kiszámítható függvények esetén, mint például az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények.

A bonyolult számításokat igénylő függvények egyszerűbb függvényekkel való minél pontosabb közelítése fontos probléma. Erre a célra a polinomok kiválóan megfelelnek, mert kiszámításukhoz csak az alapműveletek szükségesek.

Ebben a pontban az érintővel való közelítés technikáját finomítjuk. *Keressük azokat a polinomokat, amelyek az $f(x)$ függényt az x_0 pont környezetében a lehető legkisebb hibával közelítik.* Megvizsgáljuk, hogy a közelítés pontossága tetszés szerint javítható-e. Végül a legfontosabb példákat, az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények esetét tekintjük.

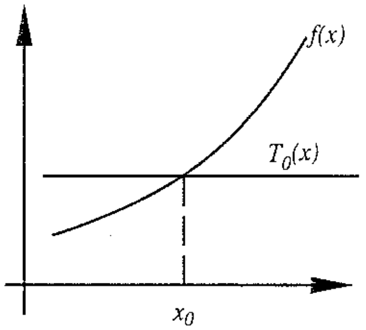
Vegyük észre, hogy az érintővel való közelítés is már pontosítása egy sokkal durvább közelítésnek, ahol csak azt követeljük meg, hogy a közelítő függvény értéke legyen azonos $f(x_0)$-val x_0-ban. A legegyszerűbb ilyen függvény az $y = f(x_0)$. Ezt nulladrendű közelítésnek nevezzük. *Az érintővel való közelítésnél megköveteltük, hogy a közelítő függvény és $f(x)$ megváltozása x_0 körül ugyanolyan mértékű legyen, vagyis deriváltja x_0-ban legyen azonos az $f(x)$ deriváltjával.*

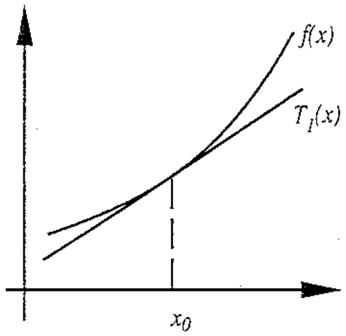
Az érintővel való közelítést elsőrendű közelítésnek nevezzük, mert bennük a független változó első hatványa szerepel.

A közelítés rendjének megfelelően jelölje a közelítő függvényeket $T_0(x)$, $T_1(x)$, ahol

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(x_0), \\ T_1(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Az alábbi ábrák már ismertek.



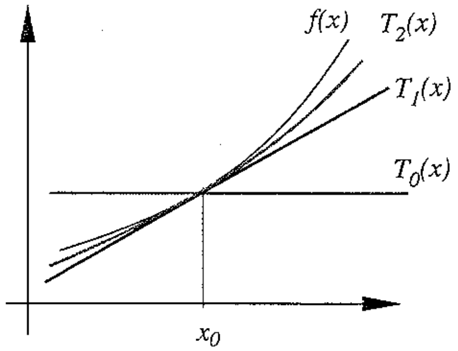


A $T_0(x)$ és $T_1(x)$ függvényekre igaz, hogy $T_0(x_0) = f(x_0)$, $T_1(x_0) = f(x_0)$, $T_1'(x_0) = f'(x_0)$. Az $f(x)$ és érintője közé más függvény grafikonja is "befér", pontosabb közelítés is adható. Ha $f''(x_0)$ létezik, akkor finomíthatjuk a $T_1(x)$ által adott közelítést másodfokú függvénnyel oly módon hogy a közelítő polinom ***konvexitási tulajdonságai*** is egyezzenek meg az $f(x)$ függvényével, azaz a második deriváltak legyenek egyenlők az x_0 helyen. Keressük a polinomot

$$T_2(x) = T_1(x) + a_2(x - x_0)^2$$

alakban, ahol az a_2 együtthatót a $T_2''(x_0) = f''(x_0)$ feltétel szerint határozzuk meg (konvexitás). Mivel $T_1''(x) \equiv 0$ és $T_2''(x_0) = 2a_2$, ezért $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$, tehát

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$



⊙

Az eljárást folytathatjuk. *Keressük a legpontosabban közelítő harmadfokú polinomot,* amelyet

$$T_3(x) = T_2(x) + a_3(x - x_0)^3$$

alakban írunk fel. Ennek ki kell elégítenie a $T_3'''(x_0) = f'''(x_0)$ feltételt, feltéve hogy $f(x)$ háromszor differenciálható x_0- ban és környezetében. A magasabb rendű deriváltak definícióját lásd a 3.7. fejezetben. Ez a feltétel a deriváltak növekedési illetve konvexitási tulajdonságainak azonosságát jelenti. Mivel $T_3'''(x_0) = (3!)a_3$, ezért

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

Innen

$$\begin{aligned} T_3(x) &= T_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \end{aligned}$$

A közelítés pontosságát fokozhatjuk, ha az $f(x)$ magasabb rendű deriváltjai is léteznek. Igaz az alábbi tétel.

4.7. Tétel. *Legyen $f(x)$ n-szer differenciálható az x_0 pontban és környezetében. Az $f(x)$ függvényt az x_0 környezetében legnagyobb pontossággal közelítő n-edfokú polinom, vagyis amely kielégíti az*

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(i)}(x_0) &= f^{(i)}(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

feltételeket, az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i. \end{aligned}$$

Definíció szerint $f^{(0)}(x) = f(x)$. Nyilvánvalóan

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

A $T_n(x)$ polinomokat az $f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor polinomjainak nevezzük.

A Tétel bizonyításában a $T_2(x)$ és $T_3(x)$ esetén elmondottakat kell megismételni. Írjuk fel a $T_n(x)$ polinomot

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

alakban.

A deriváltakat felírva, a legjobb közelítés feltételei szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_n^{(0)}(x_0) &= a_0 &&= f(x_0), \\ T_n'(x_0) &= a_1 &&= f'(x_0), \\ T_n''(x_0) &= 2a_2 &&= f''(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(i)}(x_0) &= i!a_i &&= f^{(i)}(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= n!a_n &&= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

Innen az együtthatókat kifejezve kapjuk az állítást.

A közelítés pontosságát javítandó, a $T_{n-1}(x)$-ről $T_n(x)$-re nagyon egyszerűen térhetünk át, csupán a már kiszámolt $f^{(n-1)}(x)$ függvényt kell deriválni az újabb együttható kiszámításához.

Azonnal felmerül a kérdés, mit jelent az, hogy jó a közelítés? Tudjuk-e becsülni az $|f(x) - T_n(x)|$ hibát? Kérdés továbbá, hogy a pontosság tényleg javul-e. A hiba becsléséhez még egy deriváltra van szükségünk, ami nem meglepő, mint azt látni fogjuk.

4.8. Tétel. *Legyen $f(x)$ $(n+1)$-szer differenciálható az $[x_0-h, x_0+h]$ intervallumon. Ekkor minden $x \in [x_0-h, x_0+h]$ esetén*

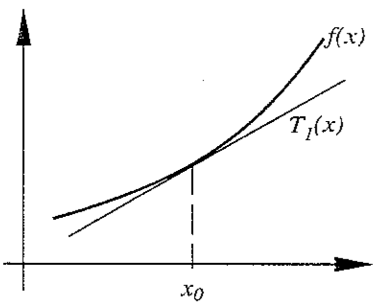
$$|f(x) - T_n(x)| \leq \max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}|(x-x_0)^{n+1}| \leq \max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} h^{n+1}$$

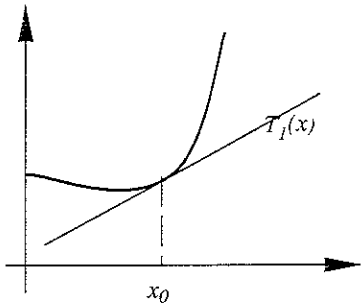
A hibát egy a $T_n(x)$ tagjaihoz teljesen hasonló kifejezéssel becsülhetjük. A különbség csupán az, hogy $f^{(n+1)}$- et nem csak x_0-ban kell vennünk, hanem az $[x_0-h, x_0+h]$ intervallumban felvett maximumát.

Speciálisan, ha $n=1$, azaz az érintővel közelítünk, akkor

$$|f(x) - T_1(x)| = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| \leq \max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} \frac{|f''(t)|}{2} h^2$$

Ez a becslés megadja az érintővel való közelítés pontosságát (3.6. pont). Akkor nem említettük, mert még nem tárgyaltuk a szükséges ismereteket. A becslés jobboldalán a konvexitást jellemző második deriváltat kaptuk. Tekintsük az alábbi ábrákat.





A második esetben a függvény sokkal erősebb konvex, mint az elsőben, azaz a második derivált sokkal nagyobb. Az ábrákról az is leolvasható, hogy az $|f(x) - T_1(x)|$ távolság a második esetben nagyobb, mint az elsőben. Ez az észrevétel teljesen egybeesik azzal, hogy a hibabecslésben a második derivált jelenik meg.

Az alkalmazások előtt vizsgáljuk meg, hogy az "n" növelésével a közelítés pontossága tetszőleges kicsinnyé tehető-e, azaz mindig teljesül-e a

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

összefüggés az x_0 közelében levő x helyeken? Ez általában nem igaz. Először is, ennek feltétele, hogy az $f(x)$ függvény végtelen sokszor (akárhányszor) differenciálható legyen. Ekkor bármely n-re létezik a $T_n(x)$ polinom. A fenti tétel szerint pedig, ha $x \in (x_0-h, x_0+h)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} h^{n+1},$$

ha a határértékek léteznek. Ha a jobboldalon levő határérték 0, akkor a pontosság tetszőlegesen növelhető.

Könnyen belátható a következő elegendő feltétel.

4.9. Tétel. *Legyen az $f(x)$ végtelenszer differenciálható az $[x_0-h, x_0+h]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy van olyan K szám, hogy minden n-re*

$$|f^{(n)}(x)| < K, \quad ha \quad x \in [x_0-h, x_0+h].$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

minden $x \in [x_0-h, x_0+h]$ esetén.

Az állítás könnyen belátható, hiszen $|f^{(n+1)}(x)| < K$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[x_0-h,x_0+h]} \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}h^{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Kh^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ez utóbbi határértéket nem bizonyítjuk.

Általában a Taylor polinomokra

$$f(x) \approx T_n(x).$$

Emellett, ha minden $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0,$$

akkor formálisan felírhatjuk az

$$f(x) = T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

egyenlőséget, ahol a jobboldali végtelen összeget az $f(x)$ függvény x_0 körüli Taylor sorának nevezzük. A végtelen összegzést minden egyes x helyen határértékként értelmezzük:

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Ha tehát a Taylor polinomok tetszőleges pontossággal megközelítik az $f(x)$ függvényt az x_0-közeli pontokban, akkor $f(x)$ egy végtelen hosszú polinomként (sorként), polinomok határértékeként állítható elő. A legfontosabb függvényekkel foglalkozunk a továbbiakban. Megjegyezzük, hogy a számológépek is ezeket a közelítéseket használják függvények kiszámítására.

4.5.1. Az e^x Taylor polinonjai az $x_0 = 0$ körül

Legyen $f(x) = e^x$ és $x_0 = 0$. Más x_0 pont esetén a probléma erre a legegyszerűbben kiszámítható esetre visszavezethető, mivel $e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h$. Mivel $(e^x)^{(i)} = e^x$ minden i-re,

$$f^{(i)}(0) = 1.$$

Innen

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Vizsgáljuk meg a becslés pontosságát! Legyen $h = 1$. Ekkor

$$|e^x - T_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} = H_n.$$

Az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetekben

$$\begin{aligned}
H_1 &= \tfrac{e}{2}, & \\
H_2 &= \tfrac{e}{6}, & \\
H_3 &= \tfrac{e}{24} & \approx 0.11, \\
H_4 &= \tfrac{e}{24\cdot 5} & \approx 0.02, \\
H_5 &= \tfrac{e}{6!} & \approx 0.003,
\end{aligned}$$

azaz a konvergencia igen gyors. Igaz továbbá, hogy tetszőleges valós x számra

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!},$$

azaz

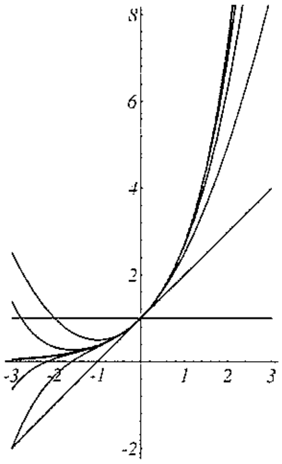
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Speciálisan

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}.$$

Ez a kifejezés az e számot sokkal gyorsabban közelíti, mint a 2.3. pontban adott sorozat.

Az ábrán az e^x függvényt és első néhány Taylor polinomját láthatjuk.



4.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

Legyen $f(x) = \sin x$ és $x_0 = 0$. Más helyek közelében való közelítést rendszerint trigonometrikus azonosságokkal erre az esetre vezetjük vissza.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

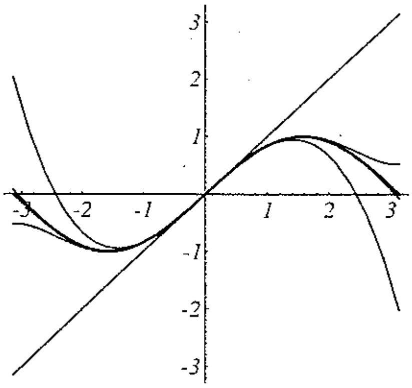
A továbbiakban ez a ciklus ismétlődik. Innen kapjuk, hogy a $\sin x$, az

$$\begin{aligned}
&x\\
&x - \frac{x^3}{3!}\\
&x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\\
&x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

polinomokkal közelíthető. A folytatás nyilvánvaló. Bebizonyítható, hogy a hiba nullához tart, ezért $\sin x$ felírható a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{(i-1)} \frac{x^{(2i-1)}}{(2i-1)!}$$

alakban. Az ábrán a $\sin x$ és néhány Taylor polinomjának grafikonja látható.



A $\cos x$-re az összefüggéseket hasonlóan kapjuk a fenti számítások alapján. A $\cos x$ Taylor polinomjai a 0 pont körül:

$$
\begin{aligned}
&1\\
&1-\frac{x^2}{2!}\\
&1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\\
&1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

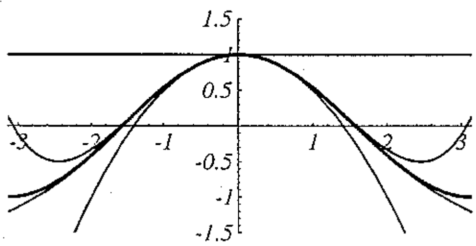
A $\cos x$ is felírható Taylor-sor alakban:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots$$

Összefüggéseink valódiságát alátámasztja, hogy tagonkénti deriválással (Vigyázat! Ennek jogosságát igazolni kell!) a $\cos x$ sorát kapjuk.

$$(\sin x)' = x' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \ldots = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots = \cos x.$$

Az alábbi ábrán a $\cos x$ és néhány Taylor polinomjának grafikonját láthatjuk.



4.5.3. Az $1/(1\pm x), \ln(1\pm x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

Tekintsük az $\{a_n = x^n\}$ $(a_0 = 1, a_1 = x, \ldots, a_n = x^n)$ mértani sorozatot.

Ismert, hogy a sorozat első $(n+1)$ elemének összege

$$S_n = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ha $|x| < 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

azaz az $1/(1-x)$ függvényre igaz az

$$\frac{1}{1 - x} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} x^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

egyenlőség, ha $|x| < 1$. Az

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

sor egy *mértani sor*.

A fentiekből adódik, hogy az $f(x) = 1/(1-x)$ függvény Taylor polinomjai a

$$T_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n$$

polinomok.

Természetesen, ehhez a formulához a Taylor polinomok általános képletéből is eljuthatunk:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\tfrac{1}{1-x}\right)' = \tfrac{1}{(1-x)^2}, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= \tfrac{2}{(1-x)^3}, & f''(0) &= 2, \\ f'''(x) &= \tfrac{3!}{(1-x)^4}, & f'''(0) &= 3!, \end{aligned}$$

és így tovább.

Az $f(x) = 1/(1+x)$ függvényre hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

azaz az $1/(1+x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

$$T_n(x) = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n$$

alakúak.

Mivel $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$ és $(\ln(1-x))' = -1/(1-x)$, ezért várható, hogy az $\ln(1+x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

míg az $\ln(1-x)$ Taylor polinomjai az $x_0 = 0$ körül

$$T_n(x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} \right)$$

alakúak, ha $|x| < 1$. Pontos indoklást mostani következtetéseinkre az integrálszámítás segítségével adhatunk. Továbbá, ezen függvények végtelen sor alakjában is felírhatók:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

és

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

ha $|x| < 1$.