3. A differenciálszámítás elemei

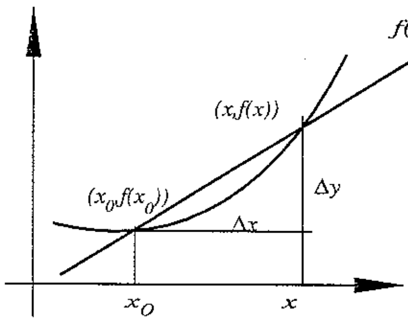
3.1. Bevezetés

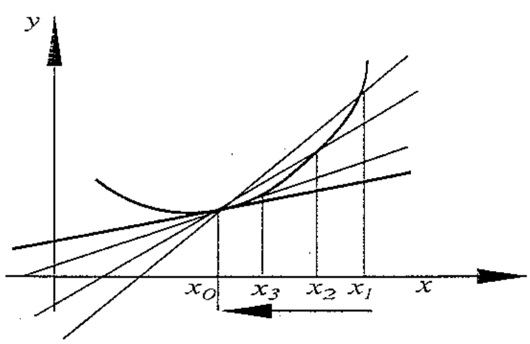
A határértékek bevezetésénél a 2. fejezetben az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintőjét az ezen a ponton átmenő szelők határhelyzeteként definiáltuk. Az érintő $m(x_0)$ meredeksége pedig az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelők

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

meredekségének a határértéke ha $x \to x_0$:

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$





Azt is láttuk, hogy ha $f(x)$ lineáris függvény, annak meredekségét kapjuk. Az $m(x_0)$ határérték tehát az egyenes meredeksége általánosításának tekinthető. A Δy az y változó megváltozása a Δx hosszúságú intervallumon. A $\Delta y/\Delta x$ hányados a függvény átlagos változási sebessége, változási rátája az adott szakaszon. A

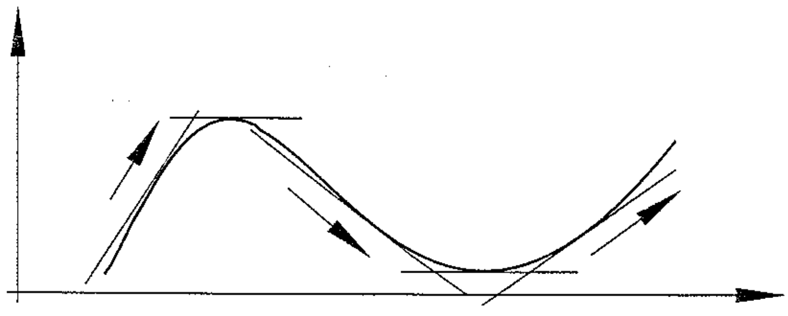
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

határérték a **függvény pillanatnyi változási rátája**, amely a függvény megváltozásának mértéke az adott pillanat közelében. Az egyenes esetén ez a mérték, a meredekség, konstans.

Ebben a fejezetben az *általánosított meredekség elméletének, a* **differenciálszámításnak** alapjaival foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy ez az elmélet alapvető eszköz a függvények viselkedésének tanulmányozásához.

A számos alkalmazás közül két igen fontosat vázolunk. A tárgyalás során ezeket matematikai pontossággal is megfogalmazzuk.

Tudjuk, hogy ha az egyenes meredeksége pozitív, akkor az egyenes növő, ha a meredekség negatív, akkor csökkenő. Hasonlót tapasztalunk általános esetben is az érintő meredekségét és a függvény monotonitását figyelve. Ezt illusztrálandó, tekintsük az alábbi ábrát:



Végül, felhívjuk a figyelmet az érintő kitüntetett tulajdonságára. Az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0)$ pontban húzott érintő minden más, ezen a ponton átmenő egyenesnél pontosabban közelíti a függvényt az x_0 hely közelében. Ezért a függvény megváltozását az érintő megváltozásával becsülhetjük az x_0 környezetében:

$$\Delta y \approx m(x_0)\Delta x, \qquad f(x) - f(x_0) \approx m(x_0)(x - x_0),$$

Ennek számos alkalmazásával fogunk találkozni az elméleti és a gyakorlati (pl. fizikai problémák) során.

3.2. A differenciálhányados definíciója

3.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely (a, b) intervallumon. Legyen $x_0 \in (a, b)$.*

Ha a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

véges határérték létezik, akkor ezt a határértéket a függvény x_0-beli **differenciálhányadosának (deriváltjának)** *nevezzük, és $f'(x_0)$- lal jelöljük. Ha a differenciálhányados az (a, b) intervallum minden pontjában létezik, akkor $f(x)$ az (a, b) intervallumon deriválható és deriváltfüggvénye $f'(x)$.*

Az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kifejezést, minthogy a differenciák hányadosa, **differenciahányadosnak** hívjuk. A differenciahányadosra használatos a korábbiakban is alkalmazott

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

jelölés. A differenciálhányadost pedig gyakran

$$\frac{dy}{dx}$$

jelöli, ami igen jól utal a differencia– és differenciálhányados közötti szoros rokonságra és a formális okoskodásoknál is hasznos lesz.

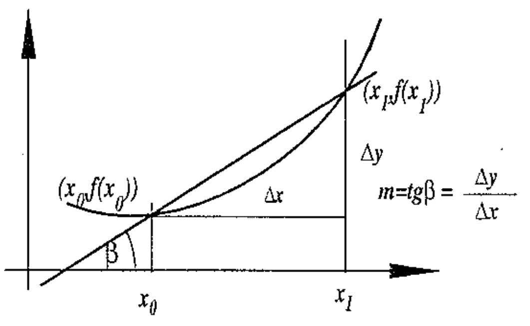
A derivált határértékként való definíciójából azonnal adódik, hogy ha létezik, akkor egyértelmű. Ugyanakkor nem biztos, hogy a derivált létezik.

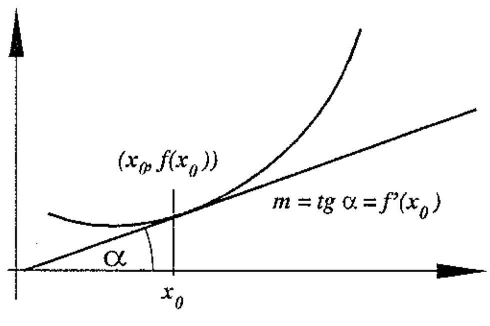
A geometriai értelmezés a bevezetés alapján nyilvánvaló. Foglaljuk össze eddigi geometriai megfontolásainkat. A differenciahányados bármely két $x_0, x_1 \in D_f$ pontra képezhető, és az $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelő iránytangense. Az ezen két ponton átmenő szelő egyenlete

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Az $f(x)$ függvény differenciálható, "sima" x_0-ban, ha létezik a grafikonjának érintője az $(x_0, f(x_0))$ pontban. Az $f'(x_0)$ derivált értéke az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő meredeksége. Az érintő egyenlete pedig

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$





3.1. Példa. Tekintsük az $f(x) = ax + b$ egyenest.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} a\frac{x - x_0}{x - x_0} = a.$$

Formálisan is visszakaptuk az ismert meredekség fogalmat. Az érintő az egyenes maga.

3.2. Példa. Legyen $f(x) = x^2$. Ekkor $f'(x) = 2x$.

Rögzítsük az x_0 helyet.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}(x + x_0) = 2x_0$$

A függvény meredeksége nem konstans.

3.3. Példa. Legyen $f(x) = x^3$ és $x_0 = 1, x_1 = 2$. Határozzuk meg az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő szelő valamint az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő érintő egyenletét.

A szelő kérdése gyorsan elintézhető, $f(1) = 1$, $f(2) = 8$, tehát az $(1,1)$ és $(2,8)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét keressük. A meredekség $m = (8 - 1)/(2 - 1) = 7$, az egyenlet pedig

$$y - 1 = 7(x - 1).$$

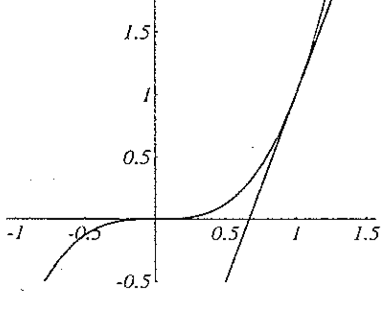
Az érintőhöz szükségünk van a deriváltra. Mivel a derivált kiszámítására vonatkozó szabályokkal később foglalkozunk, ezért használjuk a definíciót. Legyen x_0 adott.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

A derivált értéke az $x_0 = 1$ pontban $f'(1) = 3$. Az érintő egyenlete ezek után

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1);$$

$$y - 1 = 3(x - 1).$$

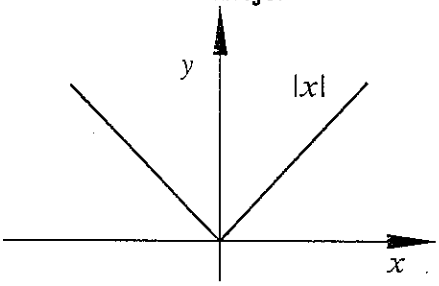


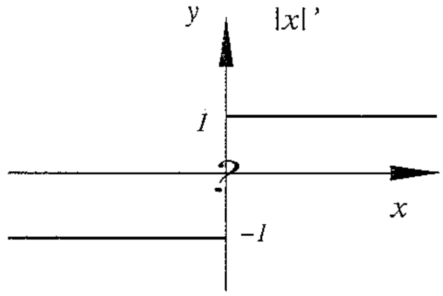
3.4. Példa. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{-x^2}$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya a $\{0\}$ halmaz. Nincs értelme a deriváltnak, hiszen már a differenciahányadosok keresése is értelmetlen.

3.5. Példa. Tekintsük most az

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

függvényt az $x_0 = 0$ pontban. A függvény grafikonja az $x_0 = 0$-ban megtörik. A görbének a $(0,0)$ pontban nincs érintője.





Nézzük meg, mi történik a differenciahányadossal. Ha $x < 0$, akkor

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1;$$

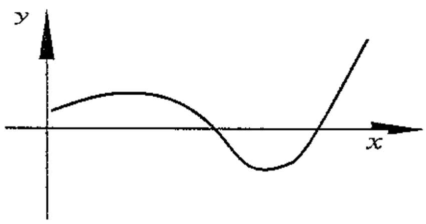
ha viszont $x > 0$, akkor

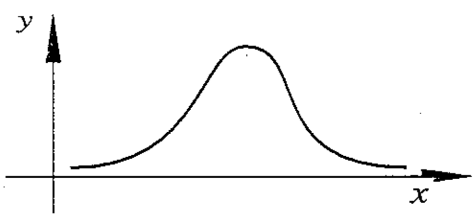
$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

Következésképpen, a differenciahányadosnak nincs határértéke, midőn $x \to 0$, nem létezik differenciálhányadosa az $x_0 = 0$ pontban. Léteznek ugyanakkor az $x < 0$, illetve az $x > 0$ megszorítással a jobb és baloldali határértékek.

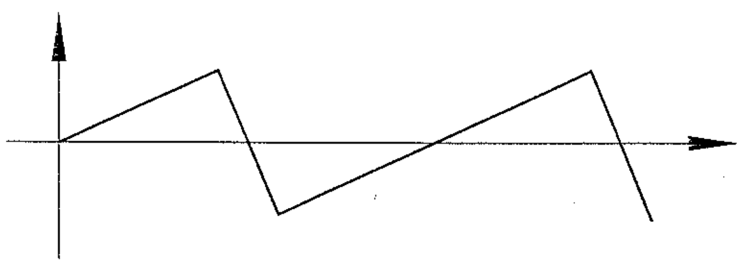
Az $|x|$ függvénynél tapasztaltakat általánosíthatjuk. A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy ha a grafikon nem "sima", az x_0 pontban megtörik vagy szakadása van, akkor abban a ponban nem differenciálható.

3.6. Példa. Sima görbék például az alábbiak:

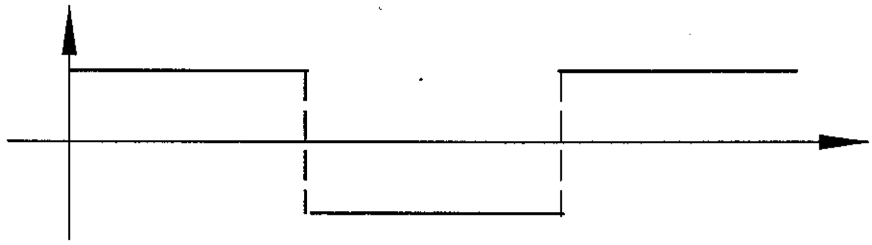




Töréspontjai vannak az alábbi fűrészfogas függvénynek, amely az elektronikában gyakori:



Szakadásai vannak a következő grafikonnak (lásd a folytonosságról szóló 2.6. fejezetet), amely a számítástechnikában alapvető:



3.3. A deriválható függvény folytonossága

Láttuk, hogy valamely folytonos függvény nem feltétlenül deriválható. Ugyanakkor a deriválhatóságból következik a függvény folytonossága.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ értelmezve van valamely (a,b) intervallumon, és $f(x)$ differenciálható az $x_0 \in (a,b)$ pontban. Ekkor $f(x)$ folytonos is x_0-ban.*

Az állítást nagyon könnyen igazolhatjuk. Mivel $f(x)$ deriválható és

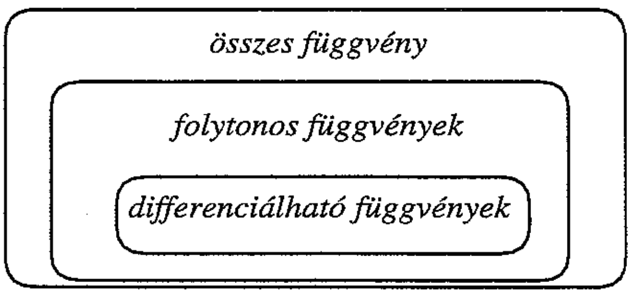
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

ezért

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

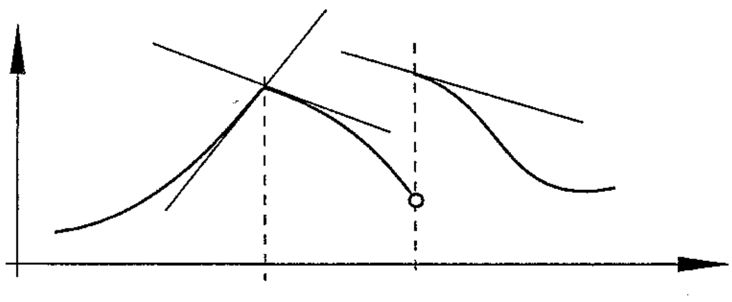
azaz az $f(x)$ függvény folytonos x_0-ban.

Tételünkből kapjuk a függvények különböző osztályainak kapcsolatát.



3.4. Féloldali deriváltak

Az $|x|$ esetén a féloldali határértékek létezése azt jelenti, hogy léteznek a bal- és jobboldali érintők. Különös jelentőségük van a töréspontok (esetleg szakadások !) esetén.



3.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely $(a, x_0]$ szakaszon. Ekkor az $f(x)$ baloldali deriváltjának nevezzük x_0-ban a*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

értéket.

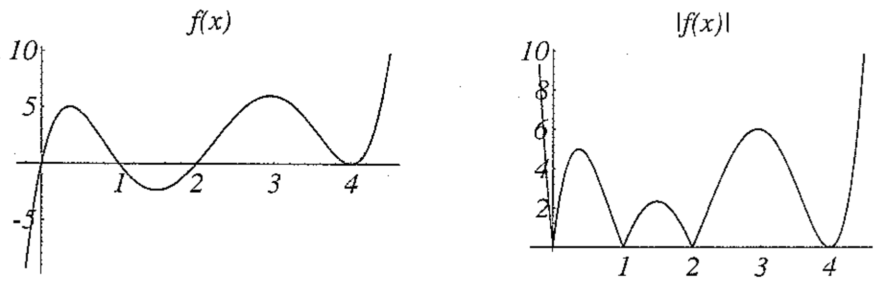
3.3. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f(x)$ értelmezve van valamely $[x_0, b)$ szakaszon. Ekkor az $f(x)$ jobboldali deriváltjának nevezzük x_0-ban a*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

értéket.

Nyilvánvaló, hogy ha $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0)$ léteznek és $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, akkor $f'(x)$ is létezik, és a féloldali deriváltak közös értékével egyezik meg.

3.7. Példa. Legyen $f(x)$ differenciálható. Az $|f(x)|$ függvénynek csak a féloldali deriváltjai léteznek az $f(x)$ zéróhelyeiben, ha ott $f'(x) \neq 0$.

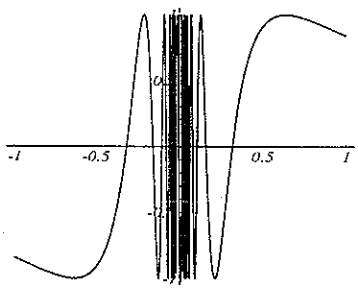


Felmerülhet a kérdés, hogy vajon minden függvényre legalább a féloldali deriváltak léteznek-e. Szerencsére a bennünket körülvevő világ, és ezért a függvények világa is sokkal gazdagabb annál, hogy erre a válasz igenlő legyen.

3.8. Példa. Az

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

függvény nem folytonos és nem differenciálható se jobbról, se balról az x=0 helyen.



3.5. Differenciálási szabályok

Már sok mindent tudunk a differenciálhányadosról, de az alkalmazások során az első lépésnél megakadnánk. Ugyanis igen nehéz lenne minden függvény deriváltját a definíció alapján közvetlenül kiszámolni. Ebben a pontban a legfontosabb differenciálási szabályokat tekintjük át.

3.5.1. A hatványfüggvények differenciálhányadosa

1. $f(x) = \text{konstans} \Rightarrow f'(x) = 0.$

Az állítás nyilvánvaló, ui.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \equiv 0.$$

2. $(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$

A bizonyítást elvégeztük a 3.2. pont példái között.

3. *Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Ekkor*

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = \\ &= (x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \ldots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1},\end{aligned}$$

mivel az első sor jobboldalán összesen n tag szerepel és mindegyikre igaz, hogy

$$\lim_{x\to x_0} x^i x_0^{n-1-i} = x_0^{n-1}.$$

Később be fogjuk bizonyítani, hogy ez az állítás igaz tetszőleges hatványkitevő (negatív, tört és irracionális) esetén is. Pontosabban:

4. *Ha $\alpha \neq 0$, akkor*

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

3.9. Példa.

$$\begin{aligned}(x^{10})' &= 10x^9, \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= \left(x^{-1}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \\ (\sqrt{x})' &= \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (x^\pi)' &= \pi \cdot x^{\pi-1}.\end{aligned}$$

3.5.2. A $\sin x$ és $\cos x$ deriváltja

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények deriválhatók, és

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Először tekintsük a $\sin x$ függvényt, legyen x_0 adott. Képezzük a differenciahányadost:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}.$$

Az első egyenlőségnél felhasználtuk az

$$\sin\alpha - \sin\beta \equiv 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

azonosságot. Mivel $\cos x$ folytonos,

$$\lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0.$$

A szorzat második tényezőjére pedig kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

Itt az $u = (x - x_0)/2$ helyettesítést és a $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)/2 = 0$ összefüggést használtuk. A $\lim_{u\to 0}(\sin u)/u = 1$ állítást a 2.9.6. pontban bebizonyítottuk.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0,$$

ami az állítást bizonyítja. A $\sin x$ és $\cos x$ grafikonját tekintve ez nem meglepő. Írjuk fel a $\sin x$ érintőjének egyenletét az $x_0 = 0$-ban:

$$y - \sin 0 = \cos 0(x - 0),$$

$$y = x.$$

A $\cos x$ deriváltját hasonlóan kaphatjuk meg, de most a

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

azonosságot használjuk:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} -\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin x_0.$$

3.5.3. Összeg, szorzat és hányados deriváltja

Függvény konstansszorosának deriváltja

Ha $f(x)$ deriválható, akkor $cf(x)$ is deriválható és

$$(cf(x))' = c\cdot f'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{c\cdot f(x) - c\cdot f(x_0)}{x - x_0} = c\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c\cdot f'(x_0).$$

Összeg deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható, akkor $f(x) + g(x)$ is deriválható és

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3.10. Példa. $(x^3 + x^2 + x)' = 3x^2 + 2x + 1.$

Szorzat deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható, akkor $f(x)\cdot g(x)$ is deriválható és

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)(f(x)-f(x_0)) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Itt $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, mert $g(x)$ differenciálhatósága miatt $g(x)$ folytonos is (3.1 tétel). A másik két határérték egyenlő rendre $f'(x_0)$-lal illetve $g'(x_0)$-lal f és g differenciálhatóságának feltételezése miatt.

3.11. Példa. $(x^4\sin x)' = 4x^3\sin x + x^4\cos x.$

Az $f(x)$ reciprokának deriváltja

Legyen $f(x)$ deriválható, és $f(x)\neq 0$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Ugyanis

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \frac{1}{f^2(x_0)}\Big(-f'(x_0)\Big) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Az első határérték az $f(x)$ differenciálhatóságából adódó folytonossága miatt igaz.

3.12. Példa. Bizonyítsuk be a hatvány deriválási szabályát negatív kitevő esetén:

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

A hányados deriváltja

Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválhatóak és $g(x)\neq 0$, akkor

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ugyanis, a szorzat és reciprok szabályok szerint

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

3.13. Példa. A $\operatorname{tg} x$ deriváltja $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \ldots)$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt.

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3.14. Példa. A $\operatorname{ctg} x$ **deriváltja** $x \neq k\pi$ $(k = 0 + \pm 1 + \pm 2 + \ldots)$
Hasonlóan kaphatjuk a $\operatorname{ctg} x$ függvény deriváltját.

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

3.5.4. Az összetett függvény deriváltja

Tekintsük az $f(g(x))$ összetett függvényt. Tegyük fel, hogy a g differenciálható az x helyen, és f differenciálható a $g(x)$ helyen. Ekkor

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ezt a szabályt láncszabálynak is nevezzük, mert az összetett függvényt láncszerűen haladva a külső függvénytől a belsőig differenciáljuk, minden függvényt a saját argumentuma szerint.

Az igazoláshoz írjuk fel a differenciahányadost:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ahol $y = g(x)$ és $y_0 = g(x_0)$. Az első tényező az $f(y)$ differenciahányadosa y szerint, a második a $g(x)$ differenciahányadosa x-szerint. Mivel $g(x)$ differenciálható, ezért egyrészt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0),$$

másrészt $g(x)$ folytonos is x_0-ban. Ezért

$$\lim_{x \to x_0} \Big(g(x) - g(x_0)\Big) = \lim_{y \to y_0} \Big(y - y_0\Big) = 0.$$

Az első tényezőben kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$$

az f differenciálhatósága miatt. Összegzésképpen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

3.15. Példa. A $\sin x^2$ függvény esetén a belső függvény $y = x^2$, a külső pedig $\sin y$, ezért

$$(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot 2x.$$

3.16. Példa. A végrehajtás sorrendjét megcserélve kapjuk a $\sin^2 x$ függvényt. Ekkor $y = \sin x$ a belső és y^2 a külső függvény. Ennek deriváltja

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x,$$

ahol $2y = 2\sin x$ a külső függvény (y^2) deriváltja.

3.17. Példa. $((x^3+1)^{10})' = 10(x^3+1)^9(3x^2)$.

3.18. Példa. Tekintsük a $(\sqrt{x})^2$ függvényt. Mechanikusan számolva kapjuk, hogy

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)' = 2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'.$$

Mivel x^2 és $\sqrt{x}$ egymás inverzei, $(\sqrt{x})^2 = x$. Ezért $((\sqrt{x})^2)' \equiv 1$. A két eredményt összevetve, kapjuk $2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)' = 1$, azaz

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x>0).$$

Megkaptuk a hatványfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt az $1/2$ kitevő esetén. A fenti gondolatmenetet általánosíthatjuk tetszőleges inverz függvényre.

3.5.5. Az inverz függvény deriváltja

A $\sqrt{x}$ deriválásának módszerét általánosan is alkalmazhatjuk az inverz deriváltjának kiszámítására.

Legyen az f függvény differenciálható az $y = \bar{f}(x)$ helyen és $f'(\bar{f}(x)) \neq 0$. Ekkor az $\bar{f}(x)$ inverz függvény is differenciálható az x helyen és

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Csak az utóbbi állítást igazoljuk. Minthogy f és $\bar{f}$ egymás inverzei, ezért

$$f\left(\bar{f}(x)\right) = x.$$

Ezt az egyenlőséget deriválva kapjuk, hogy

$$f'\left(\bar{f}(x)\right)\cdot\bar{f}'(x) = 1.$$

Innen

$$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Példaként már tekintettük a $\sqrt{x}$ esetét. Egy igen fontos alkalmazás lesz az exponenciális függvény deriváltjának kiszámítása.

3.5.6. A logaritmus függvény deriváltja, az $\ln x$ definíciója

Legyen $a>0, a\neq 1$, és tekintsük az $\log_a x$ függvényt. Legyen $x_0>0$ és $x = x_0+\frac{1}{n}$. Írjuk fel a differenciahányadost az x_0 és $x_0+\frac{1}{n}$ helyekkel.

$$\frac{\log_a(x_0+\frac{1}{n}) - \log_a x_0}{\frac{1}{n}} = n\log_a\left(1+\frac{1}{n\cdot x_0}\right) = \frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{1}{n\cdot x_0}\right)^{n\cdot x_0}.$$

A határértékekről szóló 2.3. részben szemléletes jelentését adtuk az

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{és } b_n = \left(1+\frac{1}{n\cdot b}\right)^{n\cdot b} \qquad (b>0)$$

sorozatoknak.

Ott megállapítottuk, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\cdot b}\right)^{n\cdot b} = e$$

határérték. Az "e" szám irracionális, és egy közelítő értéke $e \approx 2.7182$.

Ezt a tényt és az $\log_a x$ folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{x_0 n}\right)^{x_0 n} = \log_a e.$$

Vezessük be az "e" alapú logaritmust. Ezt a $\log_e x$ *helyett* $\ln x$ *vagy* $\log x$ *jelöli,* és **természetes logaritmusnak** nevezzük. A logaritmus azonosságai miatt

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Beláttuk tehát, hogy

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

speciálisan

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

Ez a hiányzó láncszem a hatványok deriváltjai között, ugyanis az $1/x$ függvény nem deriváltja egyetlen hatványfüggvénynek sem.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a differenciahányadosban $x_0 + \frac{1}{n}$ helyett tetszőleges $x = x_0 + h$ helyet kellene vennünk. Ebben az esetben is ugyanazt az eredményt kapnánk.

3.5.7. Az exponenciális függvény deriváltja, e^x, exponenciális növekedés

Az a^x exponenciális függvény minden $a > 0$ esetén értelmezve van, most legyen $a = e$. Tekintsük az e^x függvényt. e^x az $\ln x$ inverze, ezért

$$1 = \left(\ln e^x\right)' = \frac{1}{e^x}(e^x)'$$

ahonnan

$$(e^x)' = e^x.$$

Hasonlóan

$$\left(\log_a a^x\right)' = \frac{1}{a^x \cdot \ln a}(a^x)' = 1$$

miatt

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Nagyon érdekes összefüggéseket kaptunk. *Az exponenciális függvények változásának mértéke egyenesen arányos magával a függvény értékével.* Később látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság általános a populációk növekedésénél, nukleáris robbanásnál, lebomlásnál és sok más alkalmazásban.

Általában az olyan függvények, amelyek változási sebessége egyenesen arányos a függvény értékével, exponenciálisan növekednek ha $k > 0$, illetve csökkennek ha $k < 0$ (8. fejezet).

3.6. Lineáris közelítések

Most pontosan megfogalmazzuk az érintőnek és a szelőknek az $f(x)$-től való távolságára a bevezetőben (3.1. pont) vázolt észrevételt. Megmutatjuk, hogy *az* $f(x)$ *függvényérték és az* $(x_0, f(x_0))$ *pontban húzott érintő* x*-beli értékének különbsége sokkal gyorsabban tart nullához, mint minden más* $(x_0, f(x_0))$ *ponton átmenő egyenes esetén, ha* $x \to x_0$. Ezért az x_0 hely közelében az $f(x)$ függvényt az érintőjével közelíthetjük:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x, \qquad (f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)).$$

Tekintsünk egy tetszőleges, az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő m meredekségű egyenesre az $f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))$ különbséget. Mivel $f(x)$ folytonos, ezért

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))) = 0.$$

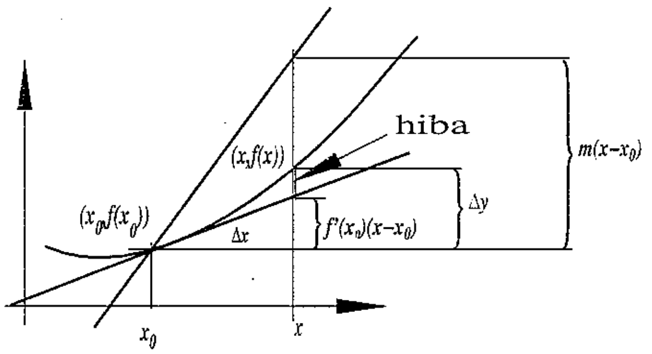
A fenti kifejezésből emeljük ki $(x - x_0)$-t:

$$f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) (x - x_0).$$

Ha $x \to x_0$, akkor az első tényező határértéke $f'(x_0) - m$. Ezért ha $m \neq f'(x_0)$, akkor a távolság csökkenése az $x - x_0$ csökkenésével arányos. Ha azonban $m = f'(x_0)$, akkor a távolság

$$\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) (x - x_0),$$

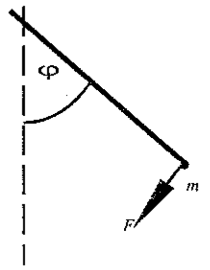
ahol mindkét tényező nullához tart, ha $x \to x_0$. Következésképpen, az érintő esetén a távolság csökkenése sokkal gyorsabb, mint más egyenesek esetén.



Megjegyezzük, hogy jó becslés adható a függvény és az érintő $f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ eltérésére. Ezzel a Taylor polinomokról szóló 4.5. fejezetben foglalkozunk.

A tétel gyakorlati alkalmazásokban igen hasznos. A valós folyamatok általában bonyolult nemlineáris (nem $y = ax + b$ alakú) függvényekkel írhatók le. Ezek matematikai vizsgálata gyakran igen nehéz. Nagyon kiterjedt matematikai elmélete van ezen függvények érintővel való helyettesítésével történő vizsgálatoknak, az úgynevezett lineáris közelítéseknek.

3.19. Példa. Tekintsük a matematikai ingát.



Azt tanultuk, hogy a lengő tömegpontra ható érintő-irányú erő kis kitérés esetén egyenesen arányos a φ kitérési szöggel, az erő a kitéréssel ellentétes irányú. Valójában az erő $\sin\varphi$-vel arányos, de ennek vizsgálata igen bonyolult. A $\sin x$ függvény érintője az $x_0 = 0$ pontban az $y = x$ egyenes. Tételünk felhasználásával kapjuk, hogy ha x kicsi, akkor $\sin x \approx x$.

Ezért mondhatjuk a matematikai inga esetén, hogy *kis kitérések* esetén a visszatérítő erő közel egyenesen arányos a kitérés szögével.

3.20. Példa. Adjunk lineáris közelítést a $\sin 46^o$ értékére. A legközelebbi szög, amelynek szinuszát ismerjük a $45^o = \pi/4$. A $\sin x$ érintője a $\pi/4$ helyen

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(x - \pi/4)}{\sqrt{2}}$$

Ebbe behelyettesítve az $x = 46^o \approx 0.802851\,rad$ értéket, kapjuk az $y_0 = 0.719448$ lineáris közelítést. Ellenőrizhető, hogy $\sin 46^o - y_0 \approx -0.000108$.

3.7. Magasabb rendű deriváltak

Általában, ha egy $f(x)$ deriválható függvény deriváltja $f'(x)$ is deriválható függvény, akkor ennek deriváltját $(f'(x))' = f''(x)$-t a függvény **második deriváltjának** nevezzük. *A függvényt ekkor kétszer deriválhatónak mondjuk.*

Ha a *második derivált is deriválható, akkor azt mondjuk, hogy a függvény háromszor deriválható*, és a **harmadik deriváltja** $f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))'$.

Továbbá, *ha egy $f(x)$ függvény deriváltjai léteznek az $1, 2, 3, \ldots, n$ esetben, azaz az $f^{(n-1)}(x)$ is deriválható függvény, akkor ennek deriváltját $(f^{(n-1)}(x))'$-t a függvény* **n-ik deriváltjának** *nevezzük.* Ennek jelölése $f^{(n)}(x)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a függvény n-szer deriválható.

Ha a függvény akárhányadik deriváltja is létezik, akkor azt mondjuk, hogy a függvény végtelenszer deriválható. Ilyen például az e^x. A magagasabb rendű deriváltak hasznát a későbbiekben látni fogjuk.

3.21. Példa. $(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = 6$. Továbbá, $(x^3)^{(4)} = 0$. Általában minden $P_n(x)$ polinom végtelen sokszor deriválható, de az $(n+1)$-ik derivált már azonosan nulla.

3.22. Példa. $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$ és $(\sin x)^{(4)} = \sin x$.

3.8. A derivált fizikai jelentése, sebesség, gyorsulás

Tekintsük az $s(t)$ útfüggvény által leírt mozgást. Valamely $t_0 < t_1$ időpillanatok között a test által megtett út $s(t_1) - s(t_0)$. A test **átlagsebessége** a t_0 és t_1 időpillanatok között

$$v(t_0, t_1) = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A test mozgásának pillanatnyi változásának jellemzésére bevezetjük a t_0-beli **pillanatnyi sebesség** fogalmát, amit a

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

határértékkel definiálunk. *A pillanatnyi sebesség $v(t)$ függvénye az $s(t)$ útfüggvény differenciálhányadosa.*

Ha például $s(t) = gt^2/2$ szabadeséssel van dolgunk, akkor $v(t) = gt$, ami a kísérleti eredményekkel megegyezik.

Hasonló eredményt kapunk a $v(t)$ *sebesség változásának mértékét, a gyorsulást* vizsgálva is. A t_0, t_1 pillanatok közötti átlagos gyorsulás

$$a(t_0, t_1) = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A pillanatnyi gyorsulás pedig

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}.$$

A pillanatnyi gyorsulás tehát a sebességfüggvény differenciálhányadosa, az útfüggvény második deriváltja. Példánkban $a(t) = (gt)' = g$. Ha a mozgó test m tömege nem változik, akkor Newton második törvénye

$$m \cdot s''(t) = F(t)$$

alakban írható, ahol F a ható erő.