2. Határérték, folytonosság

2.1. Határértékproblémára vezető feladatok

A határérték a matematikai analízis alapvető fogalma. Most néhány olyan határértékre vezető matematikai és alkalmazásokból származó példát, problémát tekintünk, amelyek a következő fejezetekben kiemelten fontosak lesznek.
– Az $f(x)$ függvény grafikonjához húzott *érintő meredekségének*, a függvény változásának a vizsgálata a differenciálszámítás alapfeladata.
– Az $f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely közti terület kiszámítása, illetve területszámításra visszavezethető problémák vizsgálata az integrálszámítás körébe tartoznak.
– Valamely valós folyamat jövőbeli viselkedésének "megjóslásakor" a folyamatot leíró $f(x)$ függvény *aszimptotikus tulajdonságainak*, a függvény végtelen közelében való viselkedésének vizsgálata szükséges.

2.1.1. A függvény érintője, mint határhelyezet

Tekintsük az $f(x)$ függvényt, amely értelmezve van valamely x_0 pontban és annak egy környezetében. Próbáljunk érintőt húzni a függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban. Először pontosan meg kell mondanunk, *mit értünk az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő alatt.* Ha az érintő fogalmát meghatároztuk, felrajzolásához a meredekségét kell még megkeresnünk. Ezután az

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

képlet megadja az érintő egyenletét.

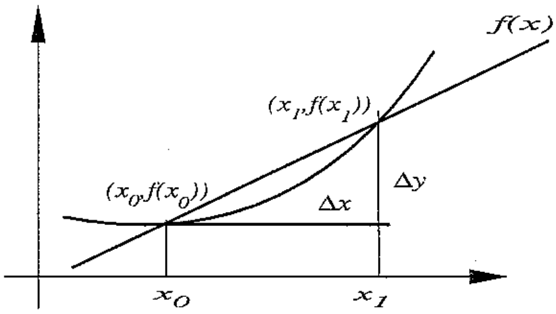
Az alábbi gondolatmenet az érintő fogalmát is megvilágítja, és a meredekség meghatározásának módszerét is megadja.

Legyen $x_1 \neq x_0$ adott. Az $(x_0, f(x_0))$ és $(x_1, f(x_1))$ pontokon átmenő egyenes (szelő) meredeksége

$$m(x_0, x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

amely függ az x_0, x_1 pontok megválasztásától. A szelő egyenlete

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

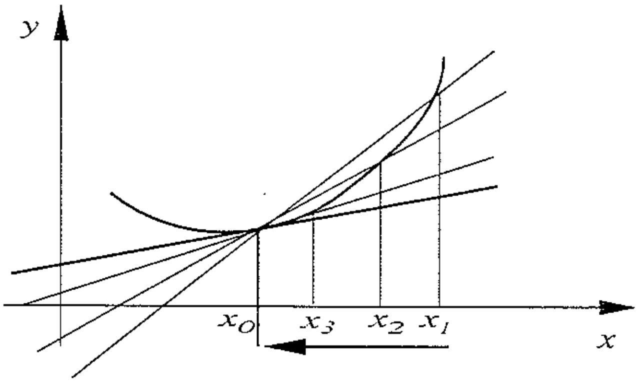


Vegyük az x_0-hoz egyre közelebb levő, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokat (pl. $x_0 + \frac{1}{n}$ vagy $x_0 - \frac{1}{n}$ választások megfelelők lehetnek). A szelők meredekségei rendre

$$m(x_0, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

egyenleteik

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{(x_n - x_0)}(x - x_0).$$



Ha a függvény grafikonja eléggé "szép", akkor az $(x_n, f(x_n))$ metszéspontok egyre közelebb kerülnek az $(x_0, f(x_0))$ ponthoz, a szelők pedig hozzásimulnak egy egyeneshez, amely "simán" érintkezik a függvény grafikonjával. Ez a grafikon érintője az $(x_0, f(x_0))$ pontban. A szelők meredeksége pedig egyre jobban megközelít egy számot, egy határértéket, amely csak az x_0-tól függ. *Ez a szám az érintő meredeksége.*

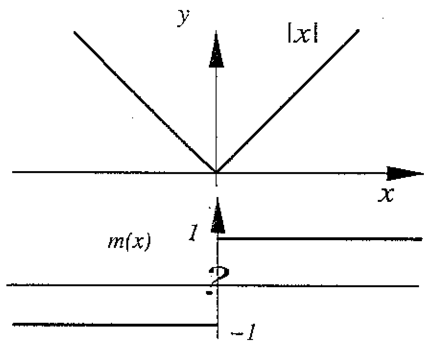
Összefoglalóul azt mondhatjuk, hogy az $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelők **határhelyzete** *az $f(x)$ függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott* **érintő**, *midőn $x \to x_0$. Az érintő meredeksége pedig a szelők meredekségének a* **határértéke** *ha x minden határon túl közeledik x_0-hoz.* Ez utóbbira a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m(x_0)$$

jelölést alkalmazhatjuk. Az érintő egyenlete

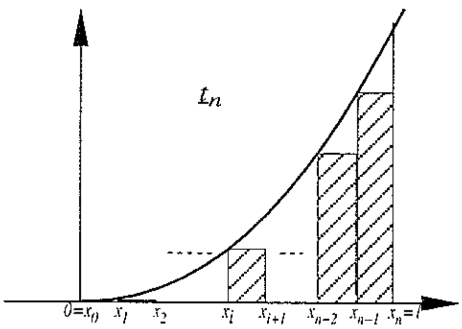
$$y - f(x_0) = m(x_0)(x - x_0).$$

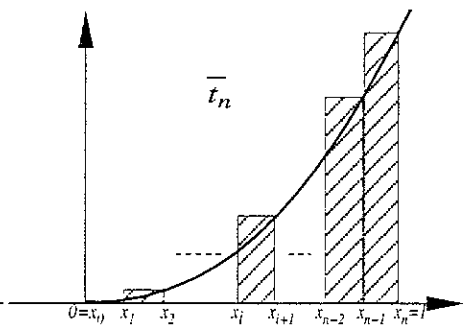
Megjegyezzük, hogy egyáltalán nem biztos hogy létezik az érintő. Legyen például $f(x) = |x|$ és $x_0 = 0$. Azt találjuk, hogy a szelőknek *nem létezik határhelyzete, ha $x \to x_0$ és nem létezik a szelők meredekségének a határértéke sem.* A grafikon "szépsége" tehát az érintő létezésének feltételezését jelenti.



2.1.2. A terület, mint határérték

Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon. Számítsuk ki a függvény grafikonja és az x-tengely közti területet 0 és 1 között. Mivel a téglalapok területét könnyen ki tudjuk számítani, ezért próbáljuk a kérdéses tartományt minél pontosabban egymást át nem fedő téglalapokkal kitölteni vagy lefedni. Olyan téglalapokat veszünk, amelyek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre, és az i-ik osztópontot jelöljük x_i-vel: $x_i = i/n$. Ekkor $x_0 = 0$, és $x_n = 1$. Ekkor a vizsgált tartomány területét alulról, illetve felülről becsüljük az ábrán látható téglalapok területének összegével.





Mivel $x_{i+1} - x_i = 1/n$, $f(x_i) = (i/n)^2$ és $f(x_{i+1}) = ((i+1)/n)^2$, ezért az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon alulról becslő téglalap területe i^2/n^3, a felülről becslő téglalapé $(i+1)^2/n^3$. Így a terület alsó becslése:

$$\underline{t_n} = \frac{0}{n^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

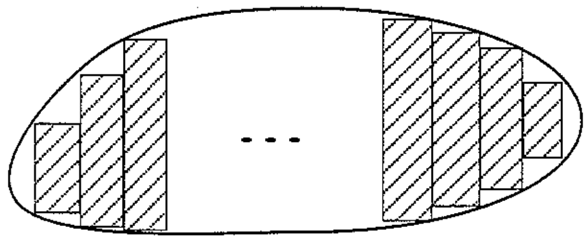
A felső becslés:

$$\overline{t_n} = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ha a beosztásokat minden határon túl finomítjuk ($n \to \infty$), $\underline{t_n}$ és $\overline{t_n}$ egyre közelebb kerülnek az $1/3$ értékhez, ezért azt mondhatjuk, hogy a vizsgált tartomány területe $1/3$. A $\underline{t_n}$ és $\overline{t_n}$ közelítő területeknek ezt a tulajdonságát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy **határértékük $1/3$, ha n tart végtelenhez**. Ezt így jelöljük:

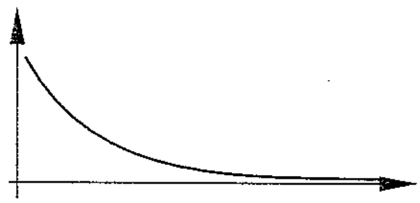
$$\lim_{n\to\infty} \underline{t_n} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} \overline{t_n} = \frac{1}{3}.$$

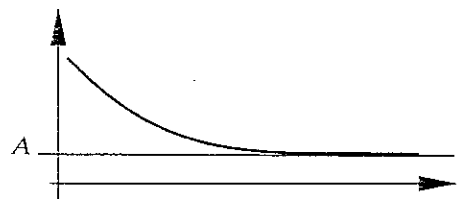
Hasonló gondolatmenetet követhetünk más síkidomok területének kiszámításakor. A területet egymást nem átfedő téglalapok vagy más egyszerű idomok területe összegének a határértékeként kapjuk.



2.1.3. Függvények viselkedése a végtelen közelében

Tekintsük valamely gyógyszer felszívódását a szervezetben. A gyógyszer mennyiségét a t időpillanatban az $f(t)$ függvény írja le. Az $f(t)$ két lehetséges grafikonja látható az alábbi ábrákon.





Szeretnénk tudni, hogy tetszőleges idő múlva is marad-e a szervezetben hatásos mennyiségű gyógyszer, vagy a gyógyszer gyakorlatilag eltűnik a szervezetből. Azt vizsgáljuk, hogy ha t minden határon túl naggyá válik, mi történik a megfelelő $f(t)$ függvényértékekkel. *Ha az $f(t)$ értékek egyre közelebb kerülnek nullához a t idő növekedésével, akkor azt mondhatjuk, hogy az $f(t)$ függvény* **határértéke a végtelenben** *nulla*, amire a $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ jelölést alkalmazhatjuk. A második grafikon esetén pedig $\lim_{t\to\infty} f(t) = A$.

2.1.4. Függvények határértékének intuitív fogalma

A bevezető példák mind speciális esetei a határérték általános fogalmának. A bevezetett speciális jelöléseket egységesíthetjük:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Ezt a jelölést úgy olvassuk, hogy $f(x)$ tart A-hoz, ha x tart a-hoz, vagy az $f(x)$ határértéke A, midőn x tart a-hoz. Ez azt jelenti, hogy, ha az x minden határon túl megközelíti a-t, akkor $f(x)$ A-hoz közeledik minden határon túl. Ez nem pontos definíció, adósak maradtunk "x tart a-hoz" egzakt meghatározásával. Látni fogjuk, hogy a véges számhoz és a végtelenhez való közeledés fogalmai különböznek egymástól.

A továbbiakban, ha a vizsgált hely lehet véges vagy végtelen, akkor az "a" jelölést használjuk. Ha hangsúlyozzuk a hely végességét, akkor a kérdéses helyet x_0 jelöli.

Először egy speciális esetet, a sorozatok határértékét tekintjük. Utána foglalkozunk az általános esetekkel.

2.2. Sorozatok határértéke

Soroljunk fel végtelen sok valós számot egymás után. A számok sorrendje lényeges. Ezeket a felsorolásokat végtelen sorozatoknak nevezzük. Ilyen sorozat például a természetes számokból álló

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

vagy a négyzetszámokból álló

$$1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$$

sorozat és az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

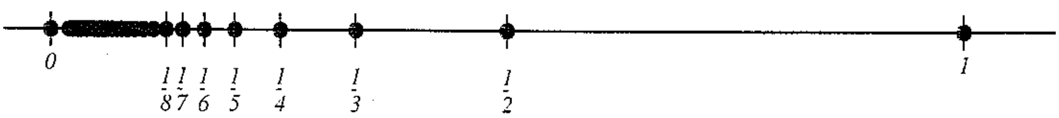
sorozat. Általában

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}; \quad \{a_n\}$$

jelöli számok végtelen sorozatát, amelynek n-ik eleme a_n. Sorozatok például a különböző pillanatokban mért kísérleti eredmények, ahol az n index az n-ik pillanatot jelöli. A sorozatok $N \to \mathbf{R}$ típusú függvények, melyek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Az indexes jelölés itt célravezetőbb az $f(n)$ jelölésnél.

Sorozat véges határértéke

Tekintsük a fent említett $a_n = 1/n$ sorozatot. Látjuk, hogy az n növekedésével a sorozat elemei *bármilyen kicsiny megadott távolságnál közelebb kerülnek a nullához.* Például, $a_n \leq 0.1$ ha $n \geq 10$. Az $a_n \leq 0.01$ egyenlőtlenség pedig $n \geq 100$-ra teljesül. És így tovább, még kisebb, *bármilyen kicsi pozitív számot megadva, a sorozat elemei nála kisebbek valamely elemtől kezdődően.*



2.1. Definíció. *Az $\{a_n\}$ sorozat nullához tart, a határértéke nulla, midőn $n \to \infty$, ha bármely, tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon)$ ε-tól függő küszöbindex, hogy $|a_n| < \varepsilon$ minden $n > N$ esetén. Ezt a tulajdonságot kétféleképpen is jelölhetjük:*

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az "a" véges szám, azaz

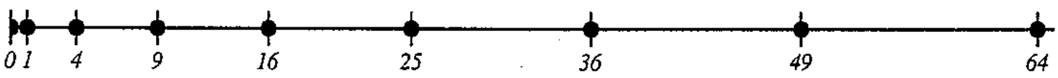
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ ha } \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.$$

Sorozat végtelen határértéke

Tekintsük az

$$a_n = n^2$$

sorozatot. A számegyenesen ábrázolva, láthatjuk, hogy



az a_n értékek egyre nagyobbak az n növekedésével, és bármilyen nagy előre adott K számnál nagyobbá válnak. Ha $K = 10$, akkor $a_4, a_5 \ldots$ már nagyobb, mint K, ha $K = 10000$, akkor $a_{101}, a_{102}, \ldots$ nagyobbak K-nál. Hasonló igaz minden adott K szám esetén.

2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat tart ∞-be, határértéke végtelen, midőn n végtelenbe tart, ha bármilyen nagy K számhoz van olyan $N(K)$ K-tól függő küszöbindex, hogy $a_n > K$ minden $n > N$ index esetén. A sorozat végtelen határértékére az*

$$a_n \to \infty \quad (n \to \infty) \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

jelöléseket használjuk.

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke $-\infty$, ha

$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = \infty.$$

2.1. Példa. Tekintsük az $a_n = q^n$ mértani sorozatot.

Ha $q > 1$, akkor $a_{n+1} = q^{n+1} = q^n \cdot q > q^n = a_n$, a sorozat monoton növő. Legyen $K > 0$ adott. Ekkor $q^n > K$, ha $n > \log_q K$. Tehát a $q > 1$ esetben $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

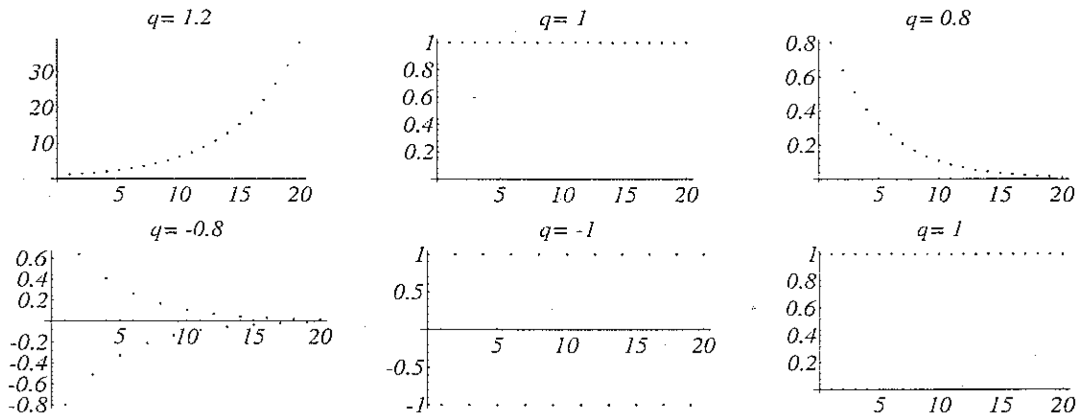
Ha $q = 1$, akkor $a_n \equiv 1$, és nyilvánvalóan $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.

Ha $q = -1$, akkor a sorozat elemei $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ a sorozat oszcillál, nem létezhet a $\lim_{n\to\infty} q^n$ határérték, a sorozat elemei nem közelednek egyetlen értékhez sem.

Legyen $-1 < q < 1$. Belátjuk, hogy $q^n \to 0$ midőn $n \to \infty$. Meg kell mutatni, hogy a $|q|^n$ értékek tetszőlegesen kicsinnyé válnak. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akármilyen kicsiny szám, például $0.1, 0.01, 0.001$ vagy kisebb. A logaritmus definíciójából adódik, hogy $|q|^n < \varepsilon$ lesz, hacsak $n > \log_{1/|q|} 1/\varepsilon$.

Ha $q < -1$, akkor a q^n sorozatnak nincs határértéke, ugyanis páros n-re az elemek (q^{2k}) pozitívak és végtelenbe tartanak, a páratlan n-re pedig (q^{2k+1}) negatívak, és $-\infty$-be tartanak.

Ábrázoljuk a különböző eseteket koordinátarendszerben:



Befejezésül tekintsük a mértani sorozat első n elemének összegét. A középiskolás tanulmányokból is ismert, hogy

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

A fentiek miatt, ha $|q| < 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Egyéb esetekben nincs véges határérték.

2.2. Példa. Legyen $a_n = a_0 + nd$, egy $(d > 0)$ differenciájú számtani sorozat. Legyen $K > 0$ adott szám. Mivel

$$a_0 + nd > K, \quad \text{ha} \quad n > \frac{K - a_0}{d}.$$

ezért $\lim_{n\to\infty}(a_0 + nd) = \infty$. Ha $d < 0$, akkor pedig $\lim_{n\to\infty} a_0 + nd = -\infty$.

2.3. Példa. Az $a_n = 2^n$ sorozat határértéke végtelen. Ugyanis legyen K tetszőlegesen nagy pozitív szám. Ekkor $2^n > K$, hacsak $n > \log_2 K$.

2.4. Példa. Az $\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots\}$ sorozat egyik végtelenhez sem tart, mert a páros indexű elemek végtelenhez, míg a páratlanok minusz végtelenhez közelednek.

2.3. Kamatos kamat, az $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, az "e" szám

Tegyünk be a bankba "A_0" forint összeget évi P % kamatra. Legyen $p = P/100$. Ekkor egy év után a követelésünk

$$A_1 = A_0(1+p),$$

két év után

$$A_2 = A_1(1+p) = A_0\,(1+p)^2\,,$$

a k-ik év után pedig

$$A_k = A_{k-1}(1+p) = A_{k-2}\,(1+p)^2 = \ldots = A_0(1+p)^k$$

forint lesz.

A pontosabb elszámolás érdekében számoljuk a kamatot félévenként. A félévi kamatláb$P/2$ %. Ekkor az első év végén követelhető B_2 összeget a

$$B_2 = A_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$$

formulával számíthatjuk ki. Hasonlóan, a kamatot harmadévenként számolva, (a harmadévi kamatláb $P/3$ %):

$$B_3 = A_0\left(1+\frac{p}{3}\right)^3$$

Növeljük az osztópontok számát. Egyre gyakrabban számolunk kamatot. Évente 4-szer, 5-ször, n-szer, rendre az időarányos $P/4$ %, $P/5$ % illetve P/n % kamatlábakkal. Ekkor

$$B_4 = A_0\left(1+\frac{p}{4}\right)^4, \; B_5 = A_0\left(1+\frac{p}{5}\right)^5, \ldots, B_n = A_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^n, \ldots$$

Ez a sorozat speciális. Az alap és a kitevő együtt változnak. Igaz általában, hogy

$$B_1 < B_2 < \ldots < B_{n-1} < B_n \ldots$$

Ez jó, mert követelésünk a kamatszámítás gyakoriságának növelésével emelkedik. Miért ne számítanánk a kamatot naponta, óránként? Ez azonban már célszerűtlen, mert a növekedés mértéke egyre kisebb. Tekintsük a speciális $p = 1$ esetet, azaz az

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sorozatot. A sorozat néhány eleme:

$$a_1 = 2, \quad a_{10} = 2.59374, \quad a_{100} = 2.70481, \quad a_{1000} = 2.71692, \quad a_{10000} = 2.71815.$$

Bebizonyítható, hogy

$$2 = a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < 3.$$

Belátható továbbá, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

határérték. Ezt a határértéket "e"-vel jelöljük és alapvető szerepe van a matematikában. Mindenütt találkozunk vele, ahol az exponenciális és logaritmusfüggvényekkel dolgozunk. Az e szám irracionális, és egy közelítő értéke

$$e \approx 2.718281828459...$$

Továbbá, ha $b \neq 0$, akkor szintén

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{bn}\right)^{bn} = e,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}\right]^p = e^p$$

A fentiek miatt betétünk az alábbiak szerint alakul évi egyre többszöri kamatszámítás esetén

$$B_n = A_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = A_0\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}\right)^p \to A_0\cdot e^p \quad (n\to\infty).$$

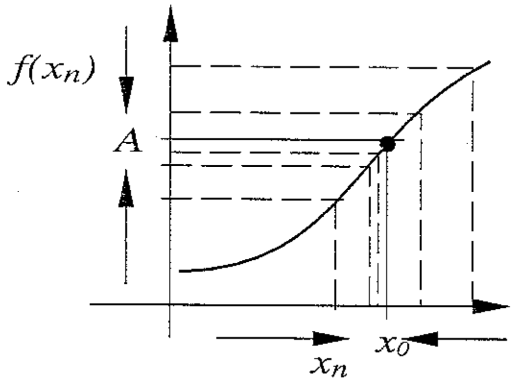
2.1. Megjegyzés. A kamatos kamat problémának biológiai alkalmazásai is vannak. Ha egy populáció népessége évenként P %-kal nő, akkor a népesség számítását a kamatos kamat képletével végezzük.

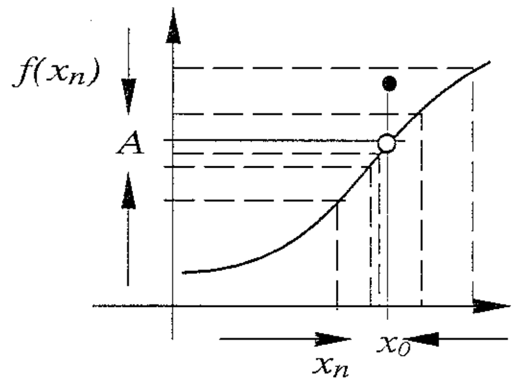
2.4. Függvény határértéke véges pontban

A sorozatok határértékének felhasználásával az intuitív definíció teljesen egzakttá válik.

2.3. Definíció. *Legyen az $f(x)$ függvény értelmezve az x_0 véges hely egy környezetében, kivéve esetleg x_0-t. Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen az A szám, ha a független változó tetszőleges x_0-hoz tartó $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ sorozata esetén a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozatának határértéke A. E tulajdonság jelölése:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ vagy } f(x) \to A \text{ ha } x \to x_0.$$





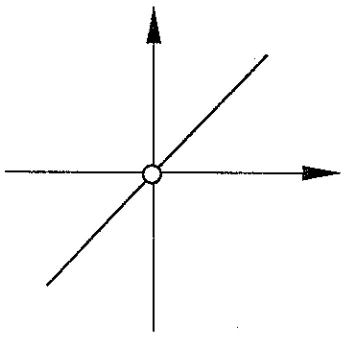
2.2. Megjegyzés. A határérték lokális tulajdonság, a függvény egy adott x_0 hely közelében való viselkedését jellemzi.

2.3. Megjegyzés. Nem tételeztük fel, hogy az "x_0" helyen a függvény értelmezve legyen, csupán azt, hogy határértéke legyen az értelmezési tartományhoz tartozó helyek sorozatainak. A fenti ábrák mutatják, hogy ha x_0 az értelmezési tartományhoz tartozik, a határérték nem függ $f(x_0)$-tól.

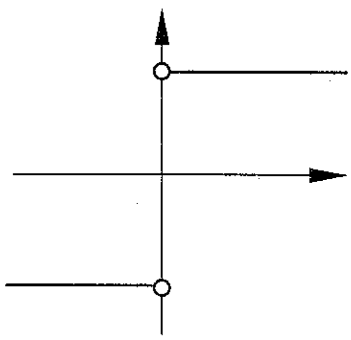
A határérték fontos tulajdonsága, hogy egyértelműen meghatározott. Szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy egy függvénynek egy adott helyen nem lehet két különböző határértéke. Igaz az alábbi tétel.

2.1. Tétel. *A határérték egyértelmű. Ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \to x_0} f(x) = B$ egyidejűleg fennáll, akkor $A = B$.*

2.5. Példa. Legyen $f(x) = x^2/x$, amely nincs értelmezve az $x_0 = 0$ helyen. Mivel $f(x) = x$, ha $x \neq 0$ ezért $\lim_{x \to 0} x^2/x = 0$.



2.6. Példa. Legyen $f(x) = |x|/x$, amely nincs értelmezve az $x_0 = 0$ helyen. Mivel $f(x) = 1$, ha $x > 0$, és $f(x) = -1$, ha $x < 0$ ezért $\lim_{x \to 0} |x|/x$ nem létezik, hiszen például ha $x_n = 1/n$, akkor $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$. Ha pedig $x_n = -1/n$, akkor $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -1$.



A határértékek kiszámítását néhány szabály megkönnyíti. A függvények közötti műveleteket a határértékek is "öröklik". Ezek a szabályok már a sorozat határértékére is érvényesek.

2.2. Tétel. *Legyen* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, *ahol* A, B *és* x_0 *valós számok. Ekkor*

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot A,$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = A+B$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = A\cdot B$$

Ha $B \neq 0$, *akkor*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

2.7. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt valamely x_0 hely közelében: $\lim_{x\to x_0} x^2 = \lim_{x\to x_0} x \lim_{x\to x_0} x = x_0\cdot x_0 = x_0^2$.

2.8. Példa. $\lim_{x\to 2}(3x^2+x) = 3\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x = 3\cdot 4 + 2 = 14$.

2.5. Féloldali határértékek

Az előző pontban a példák között láttuk, hogy az $f(x) = |x|/x$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen nincs határértéke. Azonban, ha $x_n > 0$, és $x_n \to 0$ $(n\to\infty)$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Ha pedig $x_n < 0$, és $x_n \to 0$ $(n\to\infty)$, akkor $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -1$.

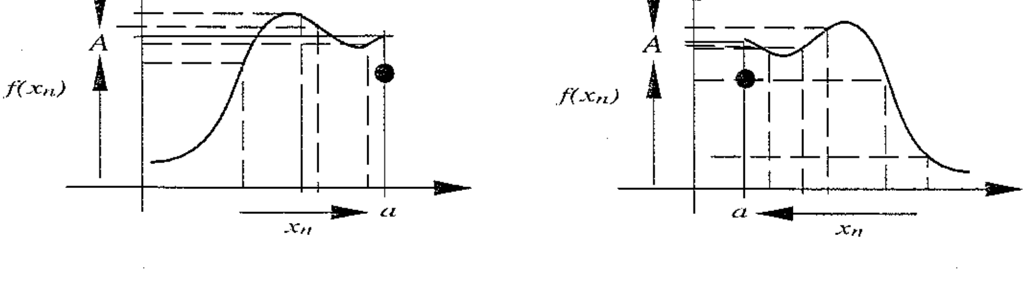
Általánosan is bevezethetjük az alábbi fogalmakat:

2.4. Definíció. *Az* $f(x)$ *baloldali határértéke az* x_0 *helyen az* A *szám, ha a határérték definíciójában csak* $x_n < x_0$, *vagyis az* $x < x_0$ *értékeken keresztül közelítünk* x_0*-hoz. Ennek jelölése*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

A határérték jobboldali, ha a határérték definíciójában $x_n > x_0$, *vagyis csak az* $x > x_0$ *értékeken keresztül közelítünk* x_0*-hoz. Jelölése*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$



2.9. Példa. Az $f(x) = \sqrt{x}$ esetén $a = 0$-ban csak a jobboldali határértéknek van értelme, és $\lim_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0$.

Gyakran hasznos az alábbi állítás.

2.3. Tétel. *Ha*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A,$$

akkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, *azaz a határérték létezik és* A*-val egyenlő.*

2.4. Megjegyzés. A határértékek kiszámításának szabályai (2.2 tétel) a féloldali határértékekre is érvényesek.

2.6. Folytonos függvények

A gyakorlatban folyamatok folytonos illetve ugrásszerű változásának jelentése szemléletes. Infúzió esetén a gyógyszer "folytonosan" jut a szervezetbe. A szervezetben levő gyógyszer mennyisége rövid idő alatt keveset változik. Ugyanakkor a gyógyszer tablettánkénti adagolása a gyógyszerszint "ugrásszerű" változását eredményezi. A folytonos és ugrásszerű változás pontos fogalmát a határérték segítségével definiálhatjuk.

2.5. Definíció. *Legyen az* $f(x)$ *függvény értelmezve az* x_0 *véges pontban és egy környezetében. Az* $f(x)$ *függvényt folytonosnak nevezzük az* x_0 *pontban, ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

azaz a határérték létezik, és egyenlő a függvényértékkel.

2.6. Definíció. *Ha* $f(x)$ *értelmezve van valamely* $[x_0, x_0 + h)$ *intervallumon és*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

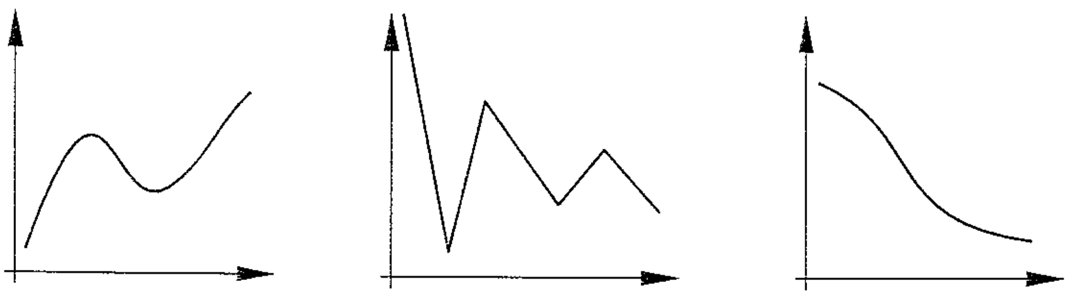
akkor a függvény jobbról folytonos x_0*-ban. Ha* $f(x)$ *értelmezve van valamely* $(x_0 - h, x_0]$ *intervallumon és*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0),$$

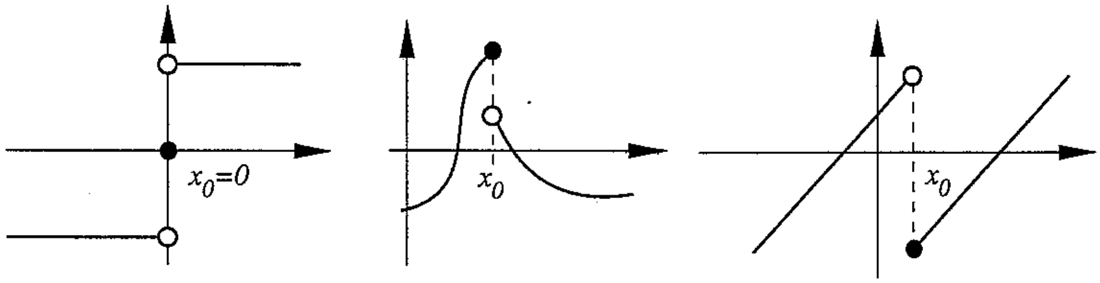
akkor a függvény balról folytonos x_0*-ban.*

Ha a függvény egy $< a, b >$ *(nyitott vagy zárt) intervallum minden pontjában folytonos (a végpontokban balról ill. jobbról), akkor azt az* $< a, b >$*-n folytonosnak nevezzük.*

A folytonosság fogalma nagyon szemléletes. Próbáljuk felrajzolni egy folytonos függvény grafikonját. Ha két hely közel van, akkor a függvényértékek távolsága is kicsiny. A grafikon megfelelő pontjai is közel vannak, ezért az egyik pontból a másikba nagyon rövid ceruzamozgással jutunk el. Mivel ugyanez a megfontolás a közbülső pontokra is igaz, azt kapjuk, hogy egy folytonos függvény grafikonját a ceruza felemelése nélkül meg tudjuk rajzolni, azaz a grafikon egy "folytonos" görbe. Az alábbi függvények folytonosak.



A következő grafikonokhoz tartozó függvények az x_0 helyen nem folytonosak.



Mindhárom esetben a szakadási helyeken a féloldali határértékek léteznek. A második függvény balról, a harmadik pedig jobbról folytonos.

A leggyakrabban használt függvények, az elemi függvények kellemes tulajdonsága folytonosságuk. Pontosabban, igazak az alábbi tételek.

2.4. Tétel. *A hatványfüggvények, a trigonometrikus függvények, továbbá az exponenciális és logaritmus függvények folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában.*

A tétel a függvényekről kialakult szemléletes elképzelés alapján elfogadható. A bizonyítást az erősen technikai jelleg miatt nem végezzük el. Az olvasó gyakorlás gyanánt megteheti.

A határértékek definícióját alkalmazva és a műveleti szabályok segítségével belátható a

2.5. Tétel.

a) *Legyen $f(x)$ és $g(x)$ folytonos x_0- ban. Ekkor $c \cdot f(x)$; $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ is folytonos x_0-ban. Ha továbbá $g(x_0) \neq 0$, akkor $f(x)/g(x)$ folytonos x_0-ban.*

b) *Ha $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű, és folytonos x_0-ban, akkor inverze $\bar{f}(x)$ folytonos $f(x_0)$-ban, azaz folytonos függvény inverze is folytonos.*

c) *Ha $g(x)$ folytonos x_0-ban és $f(x)$ folytonos $g(x_0)$-ban, akkor $f(g(x))$ folytonos x_0-ban, azaz a folytonos függvényekből képzett összetett függvény a folytonos.*

2.10. Példa. A fenti tétel miatt például folytonos az $f(x) = 1/x$, ha $x \neq 0$, de nem folytonos az $x_0 = 0$-ban, hiszen ott még értelmezve sincs.

2.11. Példa. Folytonosak továbbá a $\operatorname{tg} x$ $(x \neq \pi/2 + k\pi \quad (k = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots))$ és a $\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvények.

2.12. Példa. Mivel 2^x és x^2 folytonosak, ezért $\lim_{x\to 0}(2^x + x^2) = 1$, és $\lim_{x\to 0} x^2 2^x = 0$.

2.5. Megjegyzés. *Folytonos függvények esetén a határértékek kiszámítása egyszerű behelyettesítési probléma. Az igazi gondot a szakadási helyeken vagy az értelmezési tartomány határán vett határértékek kiszámítása jelenti.*

2.7. Végtelen határérték véges helyen

Tekintsük az $f(x) = 1/x^2$ függvényt az $x_0 = 0$ hely közelében. Tartson az $\{x_n\}$ sorozat $(x_n \neq 0)$ nullához ha $n \to \infty$. A sorozat határértékének definíciójából azonnal adódik, hogy $1/x_n^2 \to \infty$ ha $n \to \infty$.

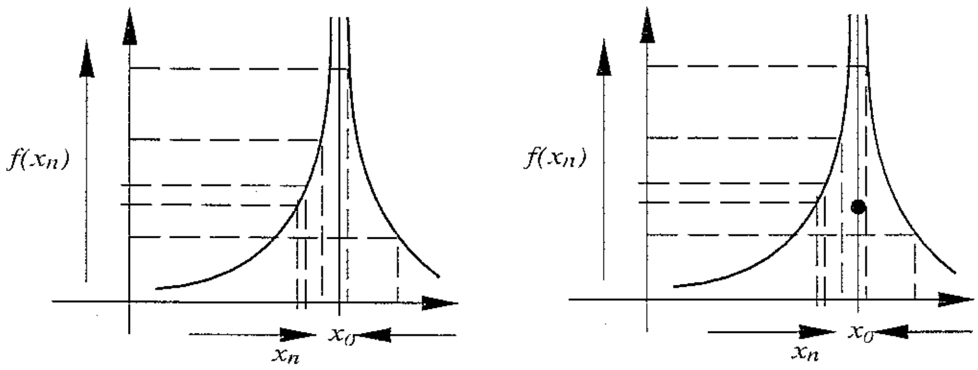
2.7. Definíció. *Legyen $f(x)$ értelmezve az x_0 véges hely egy környezetében, kivéve esetleg az x_0 helyet. Az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen végtelen, ha a független változó tetszőleges x_0-hoz tartó $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ sorozatára a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozatának határértéke végtelen. Formálisan jelölve:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \textit{vagy} \quad f(x) \to \infty \ \textit{ha} \ x \to x_0.$$

A 2.5. fejezethez hasonlóan definiálhatjuk a féloldali

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$$

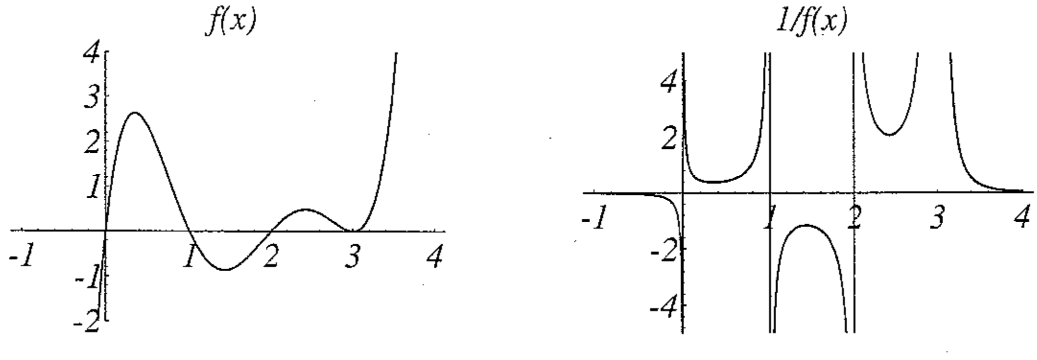
végtelen határértékeket. Továbbá, analóg módon definiálható a $-\infty$ határérték is.



A baloldali ábrán a függvény nincs értelmezve az x_0 pontban, míg a jobboldali ábrán a függvényértéket a fekete pont mutatja. Látható, hogy a határérték és a függvényérték egymástól függetlenek.

2.13. Példa. Tekintsük az $f(x) = 1/x$ függvényt és az $x_0 = 0$ helyet. Könnyen látható, hogy $\lim_{x \to 0+0} 1/x = \infty$ és $\lim_{x \to 0-0} 1/x = -\infty$.

2.14. Példa. A jellemző esetek láthatók az alábbi ábrán, amely az $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)^2$ függvény és reciprokának a grafikonját tartalmazza:



A fenti példánál tapasztaltakat általánosan is megfogalmazhatjuk.

2.6. Tétel. *Legyen* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
Ha $f(x) > 0$ az "x_0" hely környezetében, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Ha $f(x) < 0$ az "x_0" hely környezetében, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Ha $f(x)$ nem szigorúan pozitív vagy negatív, előjelet vált az x_0 hely bármely környezetében, akkor nem létezik határérték.

2.7. Tétel. *Legyen* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *és* $\lim_{x\to x_0} g(x) > 0$. *Ekkor*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$$

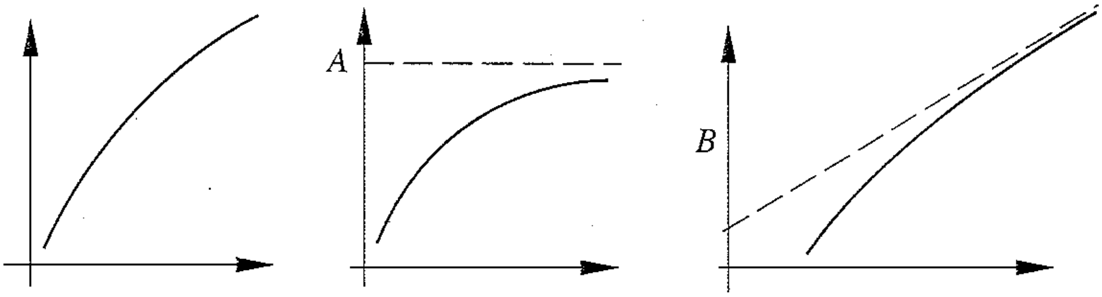
Ha $\lim_{x\to x_0} g(x) < 0$, *akkor*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty.$$

A fenti szabályok nagymértékben megkönnyítik a végtelen határértékek kiszámítását. Van azonban néhány eset, amelyekre nem fogalmaztunk meg szabályokat. Ilyenek a $\infty/\infty, 0/0, 0\cdot\infty, \infty-\infty$ típusú határértékek. Ezek határozatlanok. Kiszámításukra nincs általános szabály. Vagy közvetlenül próbáljuk a határértéket meghatározni, vagy a speciális esetek egyenként vizsgálhatók (lásd a 2.9.3. pontot). Általánosabb esetekben használható az ún. L'Hospital szabály (4.3. fejezet).

2.8. Határértékek a végtelenben

A függvények végtelen közelében való viselkedésének tanulmányozása a végtelenben vett határérték fogalmához vezet. Az alábbi három görbe alakja hasonló, mégis lényeges különbség van közöttük a végtelen közelében.

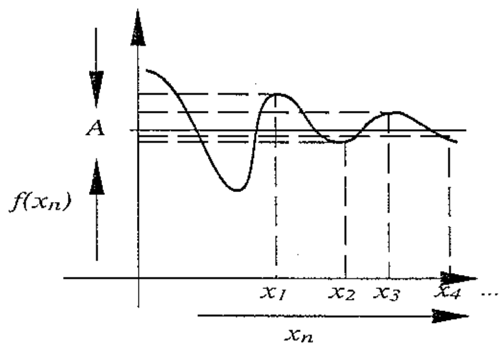


A különbséget a végtelenben vett határérték fogalma írja le.

2.8. Definíció. *Legyen* $f(x)$ *értelmezve valamely* (a,∞) *intervallumon. Az* $f(x)$ *függvény határértéke a végtelenben az* A *szám, ha a független változó tetszőleges, végtelenhez tartó* $\{x_n\}$ *sorozatára a megfelelő* $\{f(x_n)\}$ *sorozat határértéke* A. *A végtelenbeli határérték szimbólikus jelölése:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ vagy } f(x) \to A \text{ ha } x \to \infty.$$

A definíció hasonló a $-\infty$*-beli határérték esetén.*



2.15. Példa. Legyen $f(x) = 1/x$, és legyen $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$, ezért $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

2.16. Példa. Tekintsük a $\sin x$ függvényt. Legyen $x_n = n\pi$. Ekkor $\sin x_n = 0$. Ha $x_n = \pi/2 + 2n\pi$, akkor $\sin x_n = 1$. Ezért nem létezik a $\lim_{x\to\infty} \sin x$ határérték.

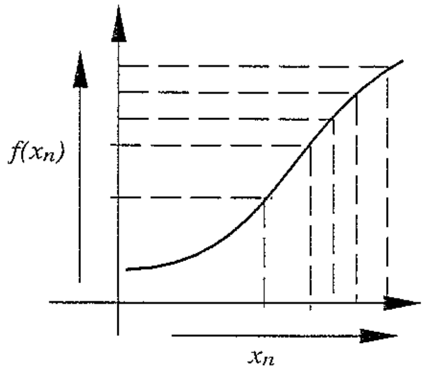
2.17. Példa. Legyen $f(x) = x^2$. Ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \infty$.

Az utolsó példa alapján bevezethetjük a végtelenben vett végtelen határérték fogalmát.

2.9. Definíció. *Legyen $f(x)$ értelmezve valamely (a,∞) intervallumon. Az $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben végtelen, ha a független változó tetszőleges, végtelenhez tartó $\{x_n\}$ sorozatára a függvényértékek $\{f(x_n)\}$ sorozatának határértéke végtelen. Jelölése:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ vagy } f(x) \to \infty \text{ ha } x \to \infty.$$

A definíció analóg a $-\infty$ határérték esetén.



2.6. Megjegyzés. A véges helyen vett véges illetve végtelen határértékek kiszámítására vonatkozó szabályok végtelenben vett határértékekre is érvényesek.

2.7. Megjegyzés. A végtelenben (mínusz végtelenben) vett határértékek féloldaliak.

2.8. Megjegyzés. A határértékre vonatkozó szabályokat a sorozatokra külön nem fogalmaztuk meg, bár az általános határérték-fogalom bevezetésénél a sorozatokból indultunk ki. Az általános esetre megfogalmazott szabályok a sorozatok határértékére változatlan formában alkalmazhatók, mivel a sorozatok speciális $N \to \mathbf{R}$ függvények, és a sorozatok határértéke a függvények végtelenbeli határértékének a speciális esetének is tekinthető.

2.18. Példa. Grafikus ismereteink alátámasztják az alábbi tulajdonságokat:

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty \quad (\alpha > 0), & \lim_{x\to\infty} x^\alpha = 0 \quad (\alpha < 0), \\
\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad (a > 1), & \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1), \\
\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty \quad (a > 1), & \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).
\end{array}$$

2.9. Függvények összehasonlítása

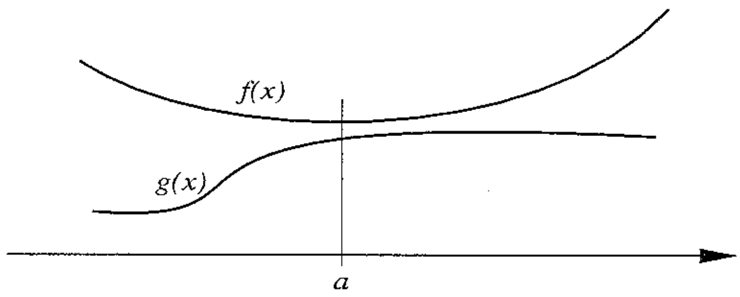
Mindennapos gyakorlati probléma két függvény viselkedésének az összehasonlítása valamely véges vagy végtelen hely közelében. Véges hely esetén "lokális", végtelen esetén pedig aszimptotikus összehasonlításról beszélünk.

A legegyszerűbb módszer a határértékek összehasonlítása. Ha azonban mindkét határérték nulla vagy végtelen, akkor felmerül a kérdés, hogy *melyikük közeledik gyorsabban* a kérdéses határértékhez. Ekkor a függvények különbségének vagy hányadosának a határértékét vizsgáljuk. Néhány fontos esetet tárgyalunk az alábbiakban.

2.9.1. Határértékek összehasonlítása

2.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(x) \geq g(x)$ az "a" véges vagy végtelen hely közelében. Ekkor $\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$, feltéve, hogy a határértékek léteznek.*

Speciálisan, ha $f(x) \geq 0$ az "a" hely közelében, akkor $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.



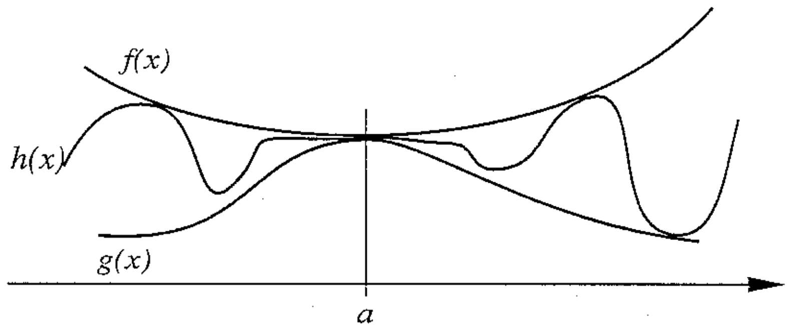
Megjegyezzük, hogy $f(x) > 0$-ból ($x \neq a$) nem következik hogy $\lim_{x\to a} f(x) > 0$. Ezt igazolja a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ példa is.

Sok esetben nem tudjuk magát a határértéket meghatározni. Ezért megpróbálunk becsléseket adni. A *rendőrelv* a határértéket a függvény kétoldali becslése segítségével határozza meg. A későbbiekben ezt a szabályt több helyen is alkalmazni fogjuk.

2.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ az "a" véges vagy végtelen hely egy környezetében. Ekkor, ha $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, akkor létezik a $\lim_{x\to a} h(x)$ határérték és*

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Ha az alsó és felső becslések határértékei nem egyenlőek, akkor a $h(x)$ függvény határértékének létezését nem garantálhatjuk.



A fenti állítások féloldali határértékekre is igazak.

2.19. Példa. A $\lim_{x\to\infty} \sin x/x$ határérték kiszámítására nem tudjuk alkalmazni a szorzatszabályt, mert a $\sin x$ határértéke nem létezik. De

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x},$$

ezért a rendőrelvet alkalmazva, a határérték nulla.

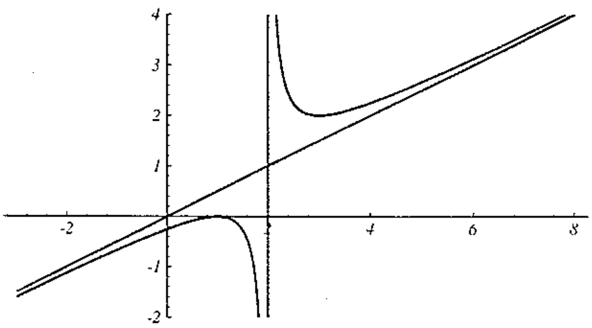
2.9.2. "Érintő a végtelenben": aszimptota

A 2.1.1. pontban láttuk az érintő kitüntetett szerepét. Most egy példán megmutatjuk, hogy a "végtelenbeli érintőnek" hasonló jelentősége van.

2.20. Példa. Tekintsük az $(x^2 - 2x + 1)/(x - 2)$ függvényt. Mivel

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2(x-2)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2(x-2)}$$

és $\lim_{x\to\infty} 1/(x-2) = 0$, a függvény és az $y = x/2$ egyenes távolsága nullához tart, ha $x \to \infty$. Az $f(x)$ függvényt a végtelen közelében az $y = x/2$ egyenessel közelíthetjük.



Általában az $y = mx+b$ egyenest az $f(x)$ függvény **aszimptotájának** *nevezzük a végtelenben, ha*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+b)) = 0.$$

Speciális eset, ha az aszimptota valamely $y = konstans$ egyenes. A konstans meghatározása nem más, mint a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ határérték kiszámítása.

2.9.3. A $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték vizsgálata, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékek

Most hasonlítsuk össze két tetszőleges függvény viselkedését. Kérdés, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények közül melyik növekedése illetve csökkenése gyorsabb, vagy változásuk összemérhető valamely "a" véges vagy végtelen hely közelében. A választ a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték vizsgálatával adjuk meg.

Legyen $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ és $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Ekkor $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ azt jelenti, hogy $f(x)$ "gyorsabban" tart végtelenbe, mint $g(x)$. Ha $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = konstans \neq 0$, akkor növekedésük hasonló. Ha $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$, akkor $f(x)$ "lassabban" tart végtelenbe, mint $g(x)$. Végül, ha nincs határérték, akkor a két folyamat nem hasonlítható össze.

Ha $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ és $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, akkor $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$ azt jelenti, hogy $f(x)$ "gyorsabban" tart nullához, mint $g(x)$. $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = konstans \neq 0$ esetén növekedésük hasonló. Ha pedig $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$, akkor $f(x)$ "lassabban" tart nullához, mint $g(x)$.

Nehézséget okoz, hogy a vizsgált hányados határértéke határozatlan ∞/∞ vagy $0/0$ alakú. Most csupán néhány fontos speciális eset vizsgálatát tudjuk elvégezni. Később a L'Hospital szabály általánosabb esetekben is alkalmazható lesz.

2.9.4. Racionális törtfüggvények határértéke véges helyen

Hasonlítsuk össze két polinom, $P(x)$ és $Q(x)$ viselkedését valamely véges x_0 hely közelében. Az eljárást példákon keresztül mutatjuk be.

Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

határértéket.

2.21. Példa. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

határértéket. Mivel az $x_0 = 1$ helyen a függvény nincs értelmezve, ezért nem folytonos. A határérték behelyettesítéssel nem határozható meg. Mivel azonban

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 \quad (x \neq 1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

2.22. Példa. A

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}$$

esetben a tört nem egyszerűsíthető,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}.$$

A második határérték nem létezik, csak a megfelelő bal- és jobboldali határértékek. Ezért

$$\lim_{x\to 1} x^2 \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1} x^2 \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

2.23. Példa. Végül tekintsük a legegyszerűbben kezelhető esetet:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+2}.$$

Az $x/(x^2+2)$ függvény nevezője nem nulla az $x_0 = 1$ pontban, itt a függvény folytonos.
Ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+2} = \frac{1}{3}.$$

Az általános esetekben az eljárás a fentiekkel analóg. A megfogalmazást gyakorlatként az olvasóra bízzuk.

2.9.5. Racionális függvények határértéke a végtelenben

Most két polinom növekedését a végtelen közelében hasonlítjuk össze. Kezdjük néhány példával.

2.24. Példa.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{2x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2}.$$

2.25. Példa.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(x+\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

2.26. Példa. Végül pedig

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x^2}} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Mindhárom esetben ugyanazt a módszert alkalmaztuk. A számlálót és nevezőt elosztottuk a legmagasabb hatványok kisebbikével, így a határérték már nem $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, alkalmazhatók a határértékekre vonatkozó tételeink. Ezzel a módszerrel kapjuk az alábbi tételt.

2.10. Tétel. *Legyen* $P_n(x) = a_n x^n \ldots + a_1 x + a_0$ *n-ed fokú,* $Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ *m-ed fokú polinom. Ekkor*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \infty & (n > m) \\ \frac{a_n}{b_m} & (n = m) \\ 0 & (n < m) \end{cases}$$

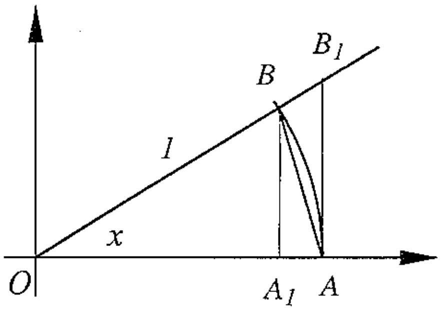
A $-\infty$-ben vett határértékeknél figyelembe kell venni, hogy páratlan kitevő esetén $x^n < 0$, ha $x < 0$. A módszer a fentivel azonos.

2.9.6. *A* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határérték

A határozatlan határértékek között igen fontos a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

határérték, amelynek jelentése, hogy a $\sin x$ függvény az origó közelében a $y = x$ függvényhez hasonlóan viselkedik. Bizonyítsuk be állításunkat! A határérték 0/0 alakú, ezért behelyettesítéssel nem számítható ki. Tekintsük az egységsugarú kört és jelöljük be az x szöget az ábrán látható módon. A szöget radiánban mérjük, ezért a szöghöz tartozó ív hossza x.



Nyilván $\overline{A_1B} = \sin x$, $\overline{AB_1} = \operatorname{tg} x$. Az ábráról leolvasható, hogy az OAB háromszög területe kisebb az OAB körcikk területénél, ami kisebb, mint az OAB_1 háromszög területe. Formálisan

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

Innen

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

ahonnan

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

A $\cos x$ függvény folytonos a nullában, ezért $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. A fenti egyenlőtlenségben a határátmenetet végrehajtva az egyenlőtlenségek a rendőrelv (2.9 tétel) szerint megmaradnak, ezért

$$1 = \lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Mivel az egyenlőtlenség bal- és jobboldala egyaránt egy, ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$