1. Alapismeretek Áttekintése

1.1. Halmazok és tulajdonságaik

A nyelvek számos szót használnak csoportok, azonos vagy hasonló tulajdonságú egyedek sokaságának jelölésére. A nép azonos nyelvet beszélő, azonos kultúrájú, többnyire egy területen élő népcsoport. Az iskolai osztály azokat a tanulókat jelöli, akik egy csoportban, együtt járnak órákra.

A matematikában pontos meghatározás szükséges. *Dolgok, objektumok egyértelműen meghatározott összességét, sokaságát* **halmazoknak** nevezzük. Az egyértelműség azt jelenti, hogy egy objektumról eldönthető, hogy az adott halmazhoz tartozik-e.

Egy halmaz adott, ha megadjuk azt a szabályt, eljárást, amely eldönti, hogy egy adott egyed a halmaz eleme-e. Egy halmazt meghatározó szabály lehet az elemek felsorolása (ha lehetséges), az elemeket megadó eljárás leírása képlettel, vagy tetszőleges más (pl. grafikus) eljárás, ami az elemek azonosítását biztosítja.

A halmazokat általában nyomtatott nagybetűvel jelöljük pl. A,B,C, vagy az elemeket ill. a szabályt kapcsos zárójelek között adjuk meg. *A halmazhoz tartozó egyedeket, objektumokat a halmaz* **elemeinek nevezzük**. *Ha* a *eleme az* A *halmaznak, akkor azt* $a \in A$ *jelöli.*

1.1. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ az egy, kettő, három és négy számokból álló halmaz.

1.2. Példa. $B = \{$piros, zöld, kék$\}$ színek halmaza, de nem az összes szín halmaza.

1.3. Példa. $C = \{x : x^2 > 2\}$ azon számok halmaza, amelyek négyzete 2-nél nagyobb.

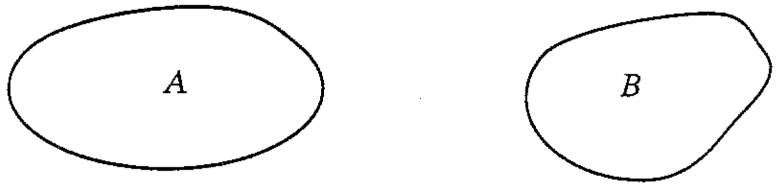
1.4. Példa. A barna hajú nők sokasága pontosabb meghatározás hiányában nem halmaz, mert például a szőkésbarna szín megítélése igen szubjektív lehet.

1.5. Példa. A 200 éves élő emberek sokasága halmaz, a tulajdonság meghatározása egyértelmű. Legfeljebb a halmaznak nincs egy eleme sem, mert valószínűleg nem találunk ilyen idős élő embert.

Azt a halmazt, amelynek nincs eleme, **üres halmaznak** *nevezzük. Jelölése:* $\emptyset$.

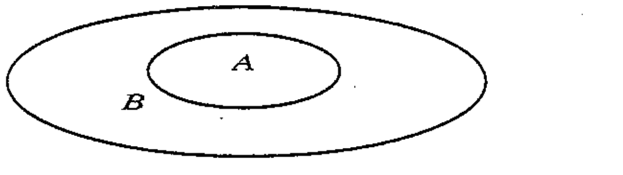
"U" az összes objektum halmaza, az **alaphalmaz, univerzum.** Ennek megválasztása függ természetesen attól, hogy objektumoknak mely körét vizsgáljuk. Emberek esetén az összes ember (élő) halmaza, számok esetén az egész számok, valós számok vagy a komplex számok halmaza is lehet univerzum az alkalmazástól függően.

A halmazok jelölésére igen jól beváltak a Venn-diagrammok, ahol egy amorf alakú zárt görbe (lehet szabályos is) által körbezárt tartomány egy halmazt jelent.



Ha az A *és* B *halmaz elemei azonosak, akkor a* **két halmaz egyenlő** $A = B$.

Az A *halmaz* **részhalmaza** *a* B *halmaznak, ha az* A *minden eleme a* B *halmaznak is eleme.* Ennek jelölése: $A \subseteq B$. *Ha* $A \subseteq B$, *és* B *halmaznak van olyan eleme, amely nem eleme az* A *halmaznak, akkor* A **valódi része** B*-nek*, formálisan $A \subset B$.



Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

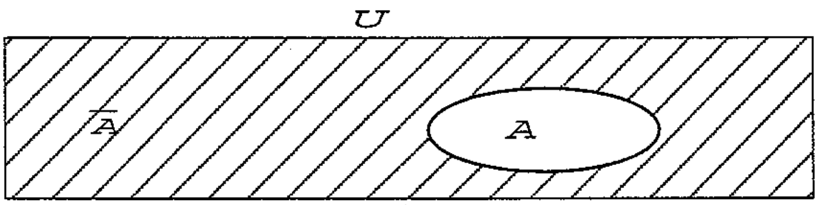
1.6. Példa. A nők halmaza valódi része az emberek halmazának.

1.7. Példa. A baktériumok halmaza valódi része az élőlények halmazának.

1.8. Példa. $\{x : x \neq 0\} = \{x : x^3 \neq 0\}$

Legyen U az alaphalmaz, és legyen A egy valódi részhalmaza. Az alaphalmaz elemei két csoportra oszthatók: amelyek elemei A-nak és amelyek nem elemei A-nak.

Azon objektumok halmazát, amelyek nem tartoznak A-hoz, az A **komplementerének** *nevezzük.* Jelölése $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$. Általában elfogadott a A^c jelölés is.



1.9. Példa. A pozitív számok halmazának ($\{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$) komplementere az a nempozitív számok halmaza ($\{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$).

1.10. Példa. Ha $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $A = \{2, 4\}$, akkor $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

1.11. Példa. Az influenzás emberek halmazának nem komplementere az egészséges emberek (tünetmentes ?) halmaza.

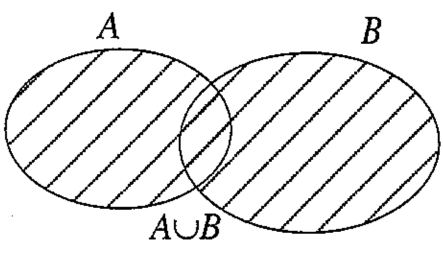
1.1.1. Műveletek halmazokkal

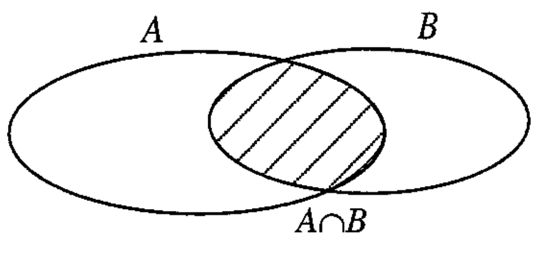
Legyenek A és B adott halmazok. *Az A és B* **egyesítése (uniója)** *tartalmazza azokat az objektumokat, amelyek az A vagy B halmazok legalább egyikének elemei.* Jelölése

$$A \cup B = \{a : a \in A \text{ vagy } a \in B\}.$$

Az A és B halmazok **metszete, közös része** *azon objektumok halmaza, amelyek A-nak és B-nek is elemei.* Formálisan:

$$A \cap B = \{a : (a \in A) \text{ és } (a \in B)\}.$$





1.12. Példa. Ha A a 10 éves fiúk, B a 10 éves lányok halmaza, akkor $A \cup B$ a 10 éves gyerekek halmaza.

1.13. Példa. Ha $A = \{x : 1 < x < 2\}$ és $B = \{x : 1.5 \leq x \leq 3\}$ akkor $A \cup B = \{x : 1 < x \leq 3\}$ és $A \cap B = \{x : 1.5 \leq x < 2\}$.

1.14. Példa. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 5, 6\} = \{3\}$.

1.15. Példa. $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$.

Ha $A \cap B = \emptyset$, (A és B metszete üres halmaz), akkor az A és B halmazokat **diszjunkt** *halmazoknak nevezzük.*

A fentiekhez hasonlóan definiálhatjuk tetszőleges számú halmaz egyesítését és metszetét:

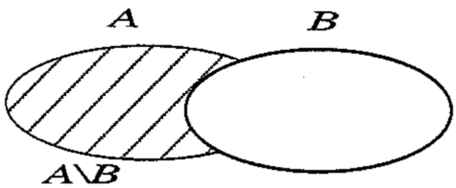
$$\bigcup_i A_i = \{a : a \in A_i : \text{legalább egy i-re}\},$$

$$\bigcap_i A_i = \{a : a \in A_i : \text{ minden i esetén}\}.$$

A két halmaz **különbségét** *az*

$$A \backslash B = \{a : a \in A \quad \textit{és} \quad a \notin B\}$$

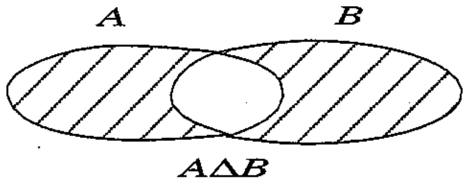
összefüggéssel definiáljuk, azaz $A\backslash B$ halmaz A azon elemeit tartalmazza, melyek nem elemei B-nek.



Gyakran összetévesztik az $A \cup B$ halmazt a

$$A \Delta B = \{a : \text{ vagy } \ a \in A \text{ vagy } \ a \in B, \text{ de } a \notin A \cap B\}$$

halmazzal, amelyet az *A és B halmazok* **szimmetrikus különbségének** *nevezünk.*



Az alábbiakban felsorolunk néhány tulajdonságot, melyek vagy nyilvánvalóak, vagy a Venn-diagramok felhasználásával szemléletesen beláthatók:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cap U = A, \qquad A \cup \emptyset = A, \qquad A \cup U = U.$$

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$ és $A \cup B = B$.

Továbbá

$$A \backslash B = A \backslash (A \cap B), \qquad A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A),$$
$$A \cap B \subset A, \qquad A \subset A \cup B.$$

Nyilvánvalóan $A\backslash B$ és $A \cap B$ diszjunktak, és

$$(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A.$$

Az egyesítés és metszet disztributivak egymásra nézve:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

és

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

A komplementer halmazokra néhány érdekesség:

$$\bar{\emptyset} = U, \qquad \bar{U} = \emptyset, \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

1.2. A valós számok

A halmazok között a számhalmazoknak kiemelt szerepük van. Az

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

halmaz a **természetes számok, pozitív egész számok** halmaza. Az **egész számok** halmaza

$$I = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \},$$

és **racionális számoknak** *nevezzük a p/q törteket, ahol p, q egész számok.* A p a tört számlálója, q a nevezője:

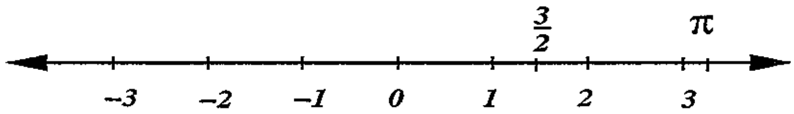
$$Q = \{\frac{p}{q} : p, q \in I, q \neq 0\}.$$

Irracionális számoknak *nevezzük azokat a számokat, amelyek nem állíthatók elő egész számok hányadosaként.* Ilyen például a $\sqrt{2}$.

1.1. Megjegyzés. Tizedes tört alakban a racionális számok véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek, az irracionális számok a végtelen nem szakaszos tizedes törtek. A tizedes törtes értelmezésből adódik, hogy minden irracionális szám tetszőleges pontossággal megközelíthető racionális számokkal, azaz racionális számok határértékeként állnak elő (lásd a 2. fejezetet). Például a π-t közelíthetjük a 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, ... számokkal.

A számegyenes

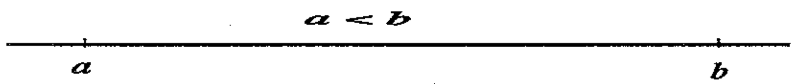
A valós számok és az egyenes pontjai egyértelműen megfeleltethetők. Tekintsünk egy egyenest, amelyen rögzítjük a 0 pontot. Innen jobbra felmérve egy adott (egység) távolságot kapjuk az 1 pontot. Ezt a távolságot végtelenszer jobbra felmérve kapjuk a pozitív egész, balra felmérve a negatív egész számokat. A q nevezőjű törteket kapjuk ($q \in N$), ha az egészek közti távolságot q egyenlő részre osztjuk. Ezt minden q természetes számra megtéve, egy "végtelen sűrű szitát" kapunk. A kimaradt pontok felelnek meg az irracionális számoknak. Az így kapott *egyenletesen, lineárisan* skálázott egyenes a számegyenes.



Egyenlőtlenségek és tulajdonságaik

Azt mondjuk, hogy az a valós szám kisebb, mint b $(a, b \in \mathbf{R})$, azaz $a < b$, ha $b - a$ pozitív. Az a szám kisebb, mint b vagy egyenlő b-vel, $a \leq b$, ha $b - a = 0$ vagy $b - a$ pozitív.

Nyilvánvaló, ha a pozitív, akkor $a > 0$, és ha a negatív, akkor $a < 0$. A számegyenesen ábrázolva, b nagyobb a-nál, ha a b pont a -tól jobbra helyezkedik el.



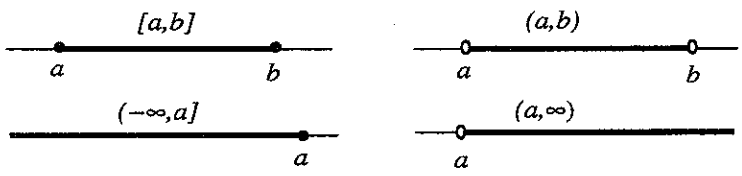
Az egyenlőtlenségek legfontosabb tulajdonságai az alábbiak.

Ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$ (tranzitivitás).
Ha $a < b$, akkor nem igaz hogy $b < a$.
Ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$.
Ha $a < b$, akkor $c + a < c + b$ (minden c valós számra).

Ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor $ab > 0$. Ha $a < 0$ és $b < 0$, akkor $ab > 0$.
Ha $a > 0$, akkor $-a < 0$.
Ha $c > 0$ és $a < b$, akkor $ca < cb$.
Ha $c < 0$ és $a < b$, akkor $ca > cb$.
Ha $0 < a < b$, akkor $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Egyenlőtlenségekkel definiáljuk az intervallumokat:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x : a \le x \le b\} && \text{zárt intervallum,}\\
[a,b) &= \{x : a \le x < b\} && \text{balról zárt, jobbról nyitott intervallum,}\\
(a,b] &= \{x : a < x \le b\} && \text{balról nyitott, jobbról zárt intervallum,}\\
(a,b) &= \{x : a < x < b\} && \text{nyitott intervallum,}\\
< a,b > & \quad \text{nyílt vagy zárt intervallum}\\
(-\infty,b] &= \{x : x \le b\}\\
(-\infty,b) &= \{x : x < b\}\\
[a,\infty) &= \{x : a \le x\}\\
(a,\infty) &= \{x : a < x\}\\
(-\infty,\infty) &= \mathbf{R}.
\end{aligned}$$



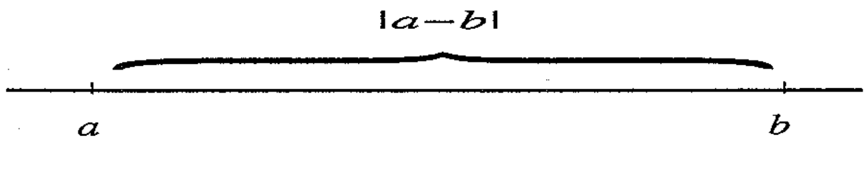
Az a valós szám **környezeteinek** *az a-t tartalmazó nyitott intervallumokat nevezzük. Az a* **baloldali környezetei** *a $(b,a]$ $(b < a)$ intervallumok. Az a* **jobboldali környezetei** *az $[a,b)$ $(b > a)$ intervallumok. A ∞* **környezetei** *a (b,∞) intervallumok. A $-\infty$* **környezetei** *a $(-\infty,b)$ intervallumok.*

Az abszolút érték

Egy valós szám abszolút értékét az alábbi formula definiálja:

$$|a| = \begin{cases} a & (a \ge 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

A számegyenest tekintve egy szám abszolút értéke az origótól való távolsága. Az a és b pontok távolsága pedig $|a-b|$.

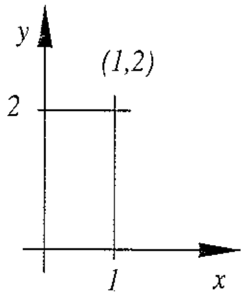


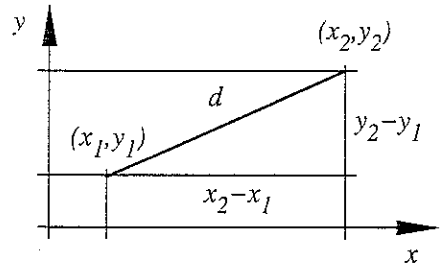
A legfontosabb tulajdonságok ellenőrzését az olvasóra bízzuk:

$$\begin{aligned}
|a| &\ge 0 \quad (|a| = 0 (\Rightarrow a = 0)\\
|a+b| &\le |a| + |b|\\
||a| - |b|| &\le |a-b|\\
|a-b| &\le |a-c| + |c-b| \quad \text{(háromszög egyenlőtlenség).}
\end{aligned}$$

1.3. Koordinátarendszerek, halmazok Descartes-szorzata

Rajzoljunk a síkon két, egymásra merőleges számegyenest (x- és y-tengelyek), úgy hogy a 0 pontjukban messék egymást (baloldali ábra). A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert kapjuk. A tengelyek metszéspontja a koordinátarendszer **origója**. A sík valamely pontján keresztül rajzoljunk a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket. Az x-tengellyel való metszéspont az adott pont x-koordinátája, az y-tengelyen levő pedig az y-koordináta. Fordítva, ha a koordináták adottak, akkor a megadott koordinátákat jelöljük be a megfelelő tengelyen. A kapott pontokon keresztül húzzunk párhuzamost a másik tengellyel. Ezen egyenesek metszéspontja lesz a keresett pont. A sík pontjainak megadása tehát ekvivalens a koordináták, azaz egy (x, y) rendezett számpár megadásával, ahol az első szám az x-koordináta, a második pedig az y-koordináta. Az origó a $(0, 0)$ pont.





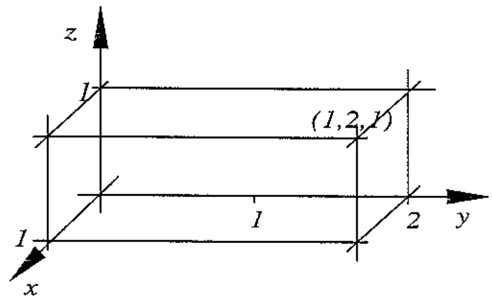
A síkbeli koordinátarendszerben a pontok távolságát a Pithagorasz tétellel számítjuk ki (jobboldali ábra). Legyenek (x_1, y_1) és (x_2, y_2) a sík pontjai. Ekkor

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

A térben is hasonlóan kapunk koordinátarendszert. Itt három egymásra merőleges tengelyre (x, y, z) van szükségünk, és a tér pontjait számhármasokkal azonosítjuk. A tér (x_1, y_1, z_1) és (x_2, y_2, z_2) pontjainak távolságát a Pithagorasz tétel kétszeri alkalmazásával a

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

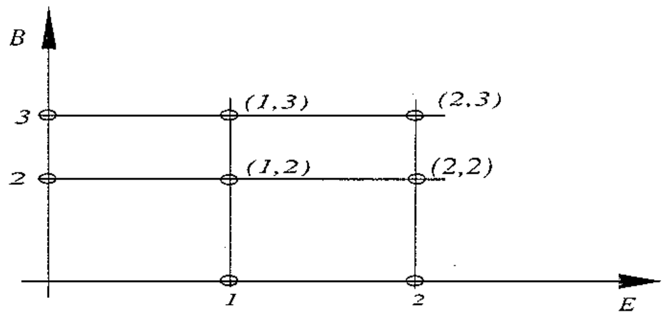
formula adja.



Adatpárok számos más területen is képezhetők. A térképen való tájékozódáshoz is két adatot, a hosszúsági és szélességi koordinátákat kell megadnunk.

Így pl. Szeged az északi szélesség 46.2° és a keleti hosszúság 20.1° mentén található. A pontos helymegadáshoz tehát a (46.2°, 20.1°) számpár megadása szükséges. Ez minden földrajzi hely esetén igaz, ha a déli szélességi és nyugati hosszúsági köröket negatív számmal jelöljük.

Egy ember betegségének megadásához a betegre és a betegségre is szükség van. Ha E az emberek és B a betegségek halmaza, akkor egy kóresetet egy (e, b) pár azonosít, ahol $e \in E$, $b \in B$. A koordinátarendszerhez hasonló ábrázolás alkalmazható az ilyen általános esetekben is. Csak tudni kell, hogy az egyes "tengelyeken" mit és hogyan jelöljünk. Például, az $E = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3\}$ halmazok esetén ez az alábbi:



Általában, bármely két A és B halmaz elemeiből képezhetünk (a, b) *rendezett párokat.*

1.1. Definíció. *Az A és B halmazok Descartes-szorzatának az összes lehetséges $a \in A$, $b \in B$ elemre képzett (a, b) pár halmazát nevezzük, és ezt $A \times B$ jelöli. Ha $A = B$, használjuk az $A \times A = A^2$ jelölést is. Formálisan:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Láttuk, hogy a sík pontjait az

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

halmazzal azonosíthatjuk, ahol $\mathbf{R}$ a valós számok halmaza. A térképen A a szélességi, B a hosszúsági adatok halmaza, $\{(a, b)\}$ az összes pont a földgömbön. $F \times N$ az összes férfi-nő rendezett párok halmaza.

Képezhetjük az elemhármasok, elem n-esek halmazát is. A tér pontjait (x, y, z) hármasokkal azonosíthatjuk, ahol x, y, z a megfelelő tengelyek mentén mért koordináták:

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}\}$$

Megjegyezzük, hogy ha $A \neq B$, akkor $A \times B \neq B \times A$. A párokban a komponensek sorrendje lényeges. Ezért használjuk a rendezett pár kifejezést.

1.4. Függvények

A valós életben található objektumok között összefüggéseket találunk, a folyamatok időben, térben változhatnak. Ezek a kapcsolatok matematikailag halmazok elemei közti megfeleltetések, speciálisan függvények.

Adott A és B halmazok elemei között megfeleltetéseket definiálhatunk. Például minden emberhez hozzárendelhetjük a rokonait vagy a betegségeit. Az első megfeleltetés emberek közötti, a második pedig emberek és betegségek közötti megfeleltetés. De szintén megfeleltetéseket kapunk, ha minden egyes emberhez hozzárendeljük a nem rokon embereket vagy azokat a betegségeket, amelyeken még nem esett át az illető.

Most tekintsük azt a megfeleltetést, amely minden személyhez hozzárendeli az anyját. Ez speciális, mivel mindenkinek csak egy anyja van. Hasonlóan, ha egy mozgó test helyzetét az adott pillanatban hozzárendeljük a pillanathoz, ugyanilyen tulajdonságú megfeleltetést kapunk az időpillanat és a pont helyzete között, mivel a test egyszerre csak egy helyen lehet. Ezekben a példákban a **megfeleltetés egyértelmű**.

1.2. Definíció. *Azokat az A és B halmazok közötti f megfeleltetéseket, amelyek minden $a \in A$ elemhez egyértelműen hozzárendelik a B halmaz legfeljebb egy b elemét, A-ból B-be képező ($f : A \to B$) függvényeknek nevezzük. A függvénykapcsolatra a $b = f(a)$ jelölést használjuk. Az f szabály leírására használatos az $f : A \to B$ jelölés is.*

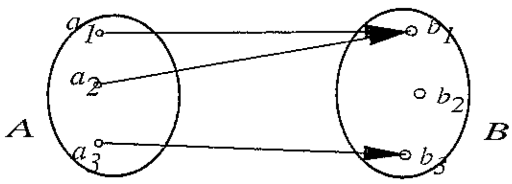
A $D_f \subseteq A$ halmaz, ahol az f szabály értelmezve van, a függvény értelmezési tartománya.

A $R_f = \{f(a) \in B\}$ halmaz a függvény értékkészlete.

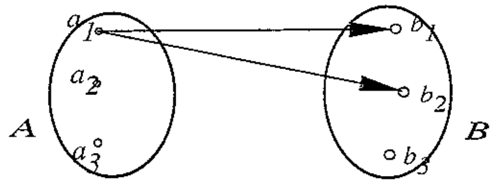
A $G_f = \{(a, f(a)) : a \in D_f\} \subseteq A \times B$ halmaz a függvény grafikonja.

A függvényt definiáltuk, ha megadtuk a $D_f \subseteq A$ és $R_f \subseteq B$ halmazokat és az f hozzárendelési szabályt.

Megjegyezzük, hogy ha $a_1 \neq a_2$, akkor nem kizárt, hogy $f(a_1) = f(a_2)$. A fentiek miatt az



típusú megfeleltetések megengedettek, de nem megengedett a



típusú megfeleltetés. Az $y = f(x)$ egyenlőségben x a független változó, amely az értelmezési tartomány elemeit veheti fel. y a függő változó, a függvényérték, amely az értékkészletnek eleme.

A szabály megadása többféle módon történhet. Például, a grafikon egyértelműen megadja a függvényt. *Egy tetszőleges $G \subseteq A \times B$ halmaz akkor és csak akkor grafikonja valamely függvénynek, ha bármely $a \in A$-ra legfeljebb egy $(a, b) \in G$.*

A továbbiakban főként $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényekkel és tulajdonságaikkal foglalkozunk, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is valós számok halmazai. Ilyen függvény például a testhőmérséklet, az oldódási folyamat során feloldódott anyag mennyiségének időbeli változása.

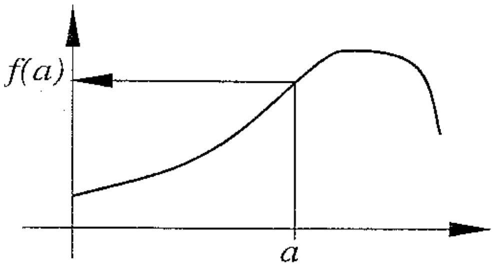
A 7. fejezetben többváltozós, $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ és $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ típusú függvényekkel foglalkozunk. Többváltozós függvényekkel írhatók le a tér pontjainak tulajdonságai, például hőmérséklete, színe (megfelelően kódolva) stb.

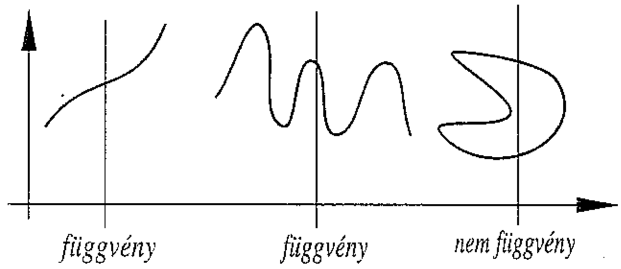
1.4.1. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények és ábrázolásuk

Tekintsünk egy $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, és legyen $D_f, R_f \subseteq \mathbf{R}$. Grafikonja egy halmaz a síkon, a Descartes-féle koordinátarendszerben ($G_f \subseteq \mathbf{R}^2$). A vízszintes x-tengelyen mérjük a független változót, a függőleges y-tengelyen pedig a függvényértékeket.

Ha ismerjük az $f(x)$ függvény grafikonját, akkor az $a \in D_f$ helyhez tartozó $f(a)$ függvényértéket megkapjuk, ha vesszük a grafikon és az x-tengely a pontján át húzott függőleges egyenes metszéspontjának y-koordinátáját.

Egy $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmaz akkor és csak akkor függvény grafikonja, ha bármely y-tengellyel párhuzamos egyenes a G halmazt legfeljebb egy pontban metszi.





Ha valamely $a \in \mathbf{R}$ esetén nincs metszéspont, akkor az nem eleme az értelmezési tartománynak. Ha van metszéspont, akkor azt az y-tengelyre vetítve kapjuk az $f(a)$ függvényértéket.

1.5. Összetett függvények

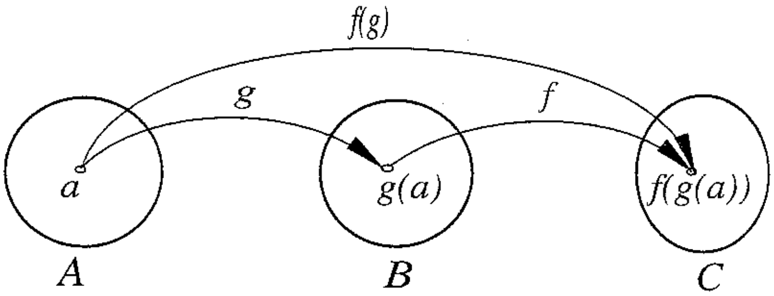
Rendelje g minden emberhez az anyját, f pedig az apját. Legyen egy ember adott. Legyen a neve a. Ekkor $g(a)$ az anyja. Alkalmazzuk f-t az anyára. Az anya apját, azaz az anyai nagyapát kapjuk. Formálisan,

$$f(g(a)) = h(a)$$

minden emberhez az anyai nagyapját rendeli.

Az $f(g(a))$ jelölés azt jelenti, hogy a-ra alkalmazzuk a g függvényt, majd az így kapott elemre (ha lehet!) alkalmazzuk az f függvényt. Az $f(g(a))$-hoz hasonlóan, képezhetjük a $g(f(a))$, $f(f(a))$, $g(g(a))$ függvényeket. Példánkbeli jelentésük kitalálását az olvasóra bízzuk.

1.3. Definíció. *Legyenek adottak az A, B, C halmazok és a $g: A \to B$ és $f: B \to C$ függvények. Legyen $a \in D_g \subseteq A$. A $b = g(a) \in D_f \subseteq B$ elemekre alkalmazható az f függvény: $f(b) = f(g(a))$. A g és f egymás utáni végrehajtásával kapott függvényt az $f(g(a))$* **összetett függvénynek** *nevezzük.*



Nyilvánvaló, hogy a végrehajtás sorrendje lényeges. A g-t belső, f-t pedig külső függvénynek nevezzük. Mivel $f(g(x))$ akkor képezhető, ha $x \in D_g$ és $g(x) \in D_f$, ezért az $f(g(x))$ értelmezési tartományát az alábbi formula adja:

$$D_{f(g)} = \{a \in D_g : g(a) \in D_f\}.$$

1.16. Példa. Tekintsük a következő példát. Legyen $A = B = C = \mathbf{R}$ a valós számok halmaza és legyen $g(x) = -x$, $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor $f(g(x)) = \sqrt{-x}$ és $g(f(x)) = -\sqrt{x}$. Az $f(g(x))$ függvény értelmezési tartománya az $\{x \leq 0\} = (-\infty, 0]$, míg a $g(f(x))$ függvény értelmezési tartománya az $\{x \geq 0\} = [0, \infty)$ halmaz.

1.17. Példa. Legyen $g(x) = x - 1$ és $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor $f(g(x)) = \sqrt{x-1}$. Az értelmezési tartományon teljesülnie kell az $x - 1 \geq 0$ egyenlőtlenségnek. Innen $D = [1, \infty)$.

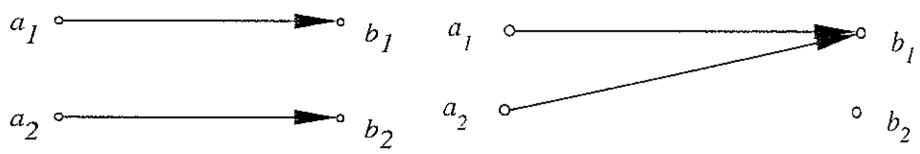
1.6. Kölcsönösen egyértelmű függvények

Az előző pont példájában minden emberhez hozzárendeltük az anyját. Ez a hozzárendelés egyértelmű. Ha a kapcsolatot megfordítjuk, azaz minden nőhöz hozzárendeljük a gyerekeit, a kapott megfeleltetés nem lesz függvény, hiszen egy anyának több gyermeke is lehet.

Az *ember* $\rightarrow$ *ujjlenyomat* megfeleltetés esetén azonban más a helyzet. Itt a személy és ujjlenyomata kölcsönösen meghatározzák egymást.

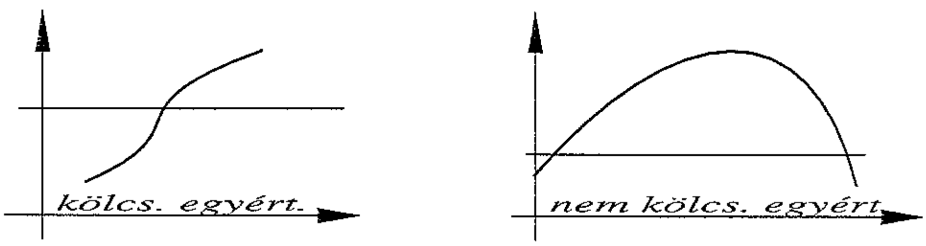
1.4. Definíció. *Az $f : A \rightarrow B$ függvényt* **kölcsönösen egyértelműnek** *nevezzük, ha $a_1 \neq a_2$, akkor $f(a_1) \neq f(a_2)$. A függvény grafikonját tekintve ez azt jelenti, hogy adott $b \in B$ esetén legfeljebb egy (a, b) lehet eleme a $G = \{(a, f(a))\}$ halmaznak.*

Az ábrán a baloldali hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, de nem az a jobboldali.



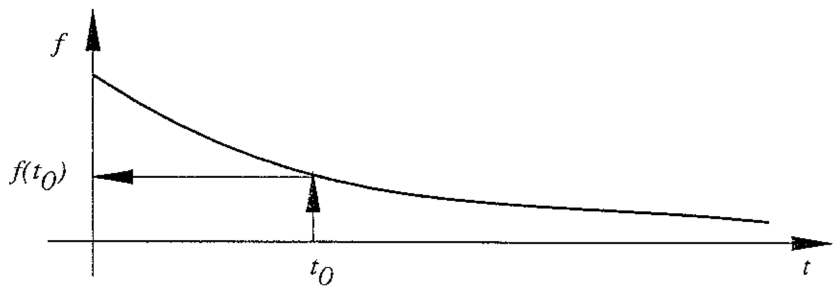
1.6.1. Kölcsönösen egyértelmű R → R függvények grafikonja

A definíció miatt egy $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény akkor és csakis akkor kölcsönösen egyértelmű, ha a $G_f \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ grafikont bármely x-tengellyel párhuzamos egyenes legfeljebb egy pontban metszi.

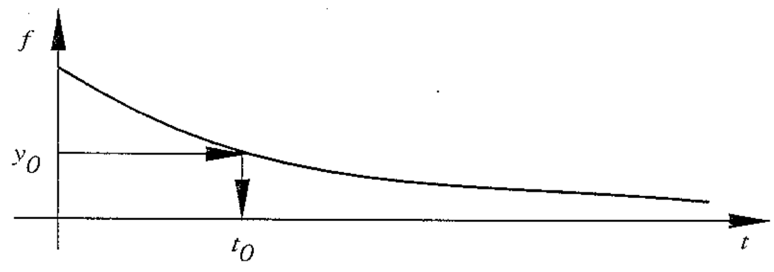


1.7. Inverz függvény

1.18. Példa. A szervezetben a gyógyszer felszívódását az $f(t)$ függvény írja le. Ha kiváncsiak vagyunk a gyógyszerszintre adott t_0 pillanatban, akkor az alábbi ábrán látható módon járunk el:



A kérdés gyakran fordított. Mikor adjuk be a következő tablettát? Akkor, ha a szint egy minimális hatásos értéket, mondjuk y_0-t elér. Azt a t_0 pillanatot keressük, melyre $f(t_0) = y_0$.



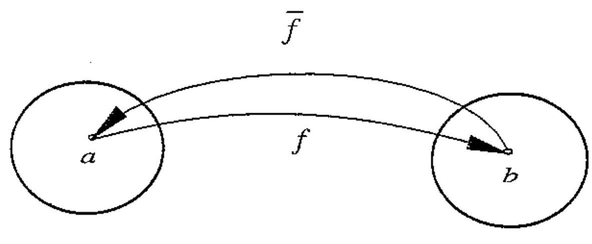
A fenti példában a t_0 és y_0 közötti *hozzárendelés irányát megfordítottuk.* Ezt csak kölcsönösen egyértelmű függvények esetén tehetjük meg.

Kölcsönösen egyértelmű függvények esetén a hozzárendelés irányát megfordítva szintén függvényt kapunk.

1.5. Definíció. *Ha f kölcsönösen egyértelmű, akkor a fordított $b = f(a) \to a$ hozzárendelés is függvényt definiál. Ha $b \in R_f$ adott, azt az $a \in D_f$ elemet keressük, amelyre $f(a) = b$. Azt a függvényt, amely az $f(a) \in B$ függvényértékhez rendeli az $a \in A$ elemet az f* **inverzének** *nevezzük és $\bar{f}$-val jelöljük. Néha használatos az f^{-1} jelölés is. Formálisan, ha $b = f(a)$, akkor $\bar{f}(b) = a$, azaz*

$$\bar{f}(f(a)) = a \quad \textit{és} \quad f(\bar{f}(b)) = b.$$

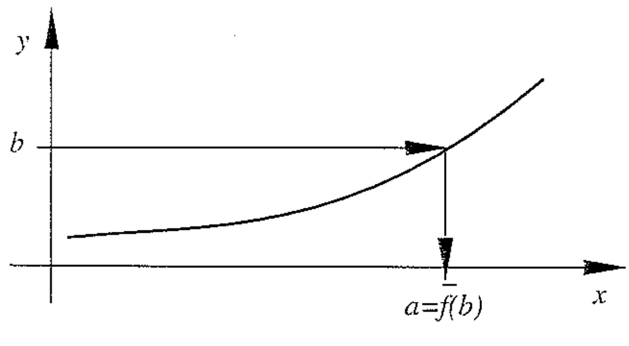
Nyilvánvaló, hogy $D_f = R_{\bar{f}}$, $R_f = D_{\bar{f}}$ és a grafikon $G_{\bar{f}} = \{(f(a), a) : a \in D_f\}$.



Példánkban a $t_0 = \bar{f}(y_0)$ időpontot keressük.

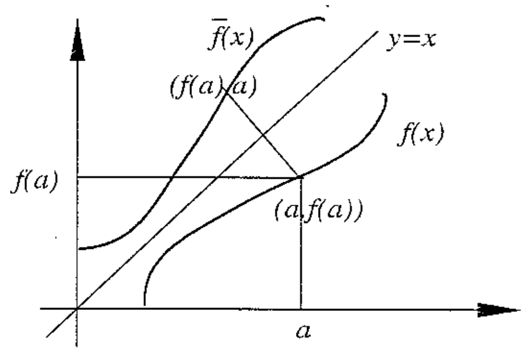
1.8. R → R függvények inverze

Legyen adott $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kölcsönösen egyértelmű függvény grafikonja, és legyen $b \in \mathbf{R}$. Keressük az $\bar{f}(b)$ értéket, azaz azt az a számot, melyre $f(a) = b$. Az a hely grafikus megtalálásához a gyógyszer felszívódásánál a fenti példában használt eljárást követjük. Húzzuk meg az $y = b$ egyenest. A grafikonnal való metszéspont (ha van, akkor egyetlen egy) x-koordinátája a keresett a szám.



Az inverz függvény grafikonja

Ha $y = f(x)$, akkor $\bar{f}(y) = x$, ezért az $(x, f(x))$ pont az $f(x)$ grafikonjának, $(f(x), x)$ pedig az $\bar{f}(x)$ grafikonjának eleme. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az f és $\bar{f}$ grafikonja egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.



Az inverz függvény megadása

Az inverz függvény megtalálásához az analitikusan (képlettel megadott) $f(x)$ függvény esetén az

$$f(x) = y$$

egyenletet kell x-re megoldani. Ekkor

$$x = \bar{f}(y)$$

Mivel szokásosan x jelöli a független változót, ezért végrehajtva az $y \leftrightarrow x$ cserét, kapjuk az $y = \bar{f}(x)$ függvényt.

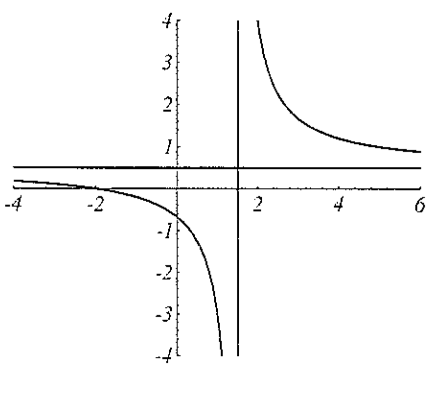
1.19. Példa. Legyen $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$. Az inverz meghatározásához oldjuk meg az

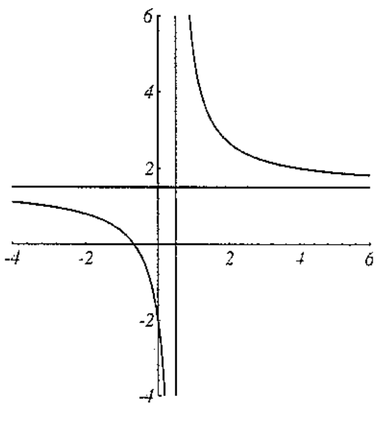
$$y = \frac{x+2}{2x-3}$$

egyenletet:

$$x + 2 = y(2x-3) = 2x \cdot y - 3y$$
$$(2y-1)x = 3y + 2$$
$$x = \frac{3y+2}{2y-1}.$$

Tehát $\bar{f}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$. Az $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ grafikonját az alábbi ábrán láthatjuk:





1.20. Példa. Tekintsük az $f(x) = (x-2)^2 + 3$ a csúcsponti képlettel megadott parabolát. Oldjuk meg az

$$y = (x-2)^2 + 3$$

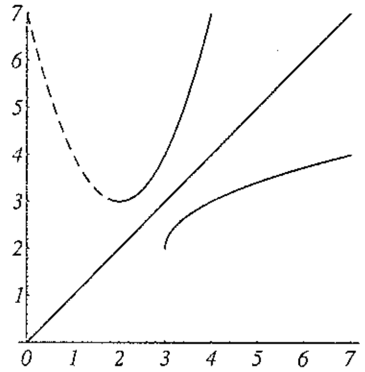
egyenletet x-re:

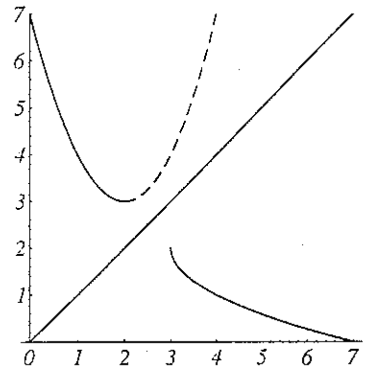
$$(x-2)^2 = y - 3$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{y-3}$$
$$x = \pm\sqrt{y-3} + 2.$$

A parabola csak az $x \geq 2$ vagy az $x \leq 2$ feltétel mellett kölcsönösen egyértelmű (részletesen lásd a 1.14. fejezetet). Ezért két eset van.

a.) Ha $f_1(x) = (x-2)^2 + 3 \quad (x \geq 2)$, akkor $\bar{f}_1(x) = \sqrt{x-3} + 2 \quad (x \geq 3)$ (baloldali ábra).

b.) Ha pedig $f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \quad (x \leq 2)$, akkor $\bar{f}_2(x) = -\sqrt{x-3} + 2 \quad (x \geq 3)$ (jobboldali ábra).



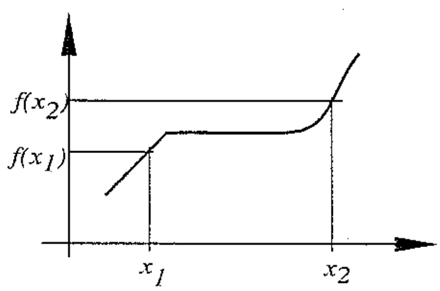


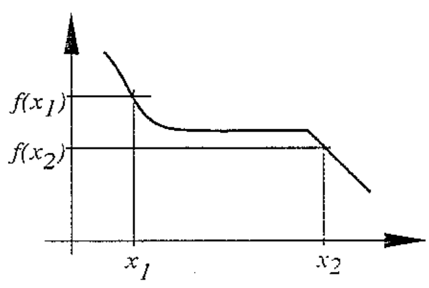
A fenti példák a következő általánosabb eljárásnak speciális esetei. Legyen $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű, és legyen inverze $\bar{f}(x)$. Ekkor a $g(x) = f(x-p) + q$ is invertálható, és inverze $\bar{g}(x) = \bar{f}(x-q) + p$. Az ilyen alakú függvények ábrázolásával részletesen a 1.13. fejezetben foglalkozunk.

1.9. Monoton függvények

Azt mondjuk, hogy $f(x)$ **nemcsökkenő (nemnövő)** *az (a, b) intervallumon, ha minden $x_1 < x_2$ esetén*

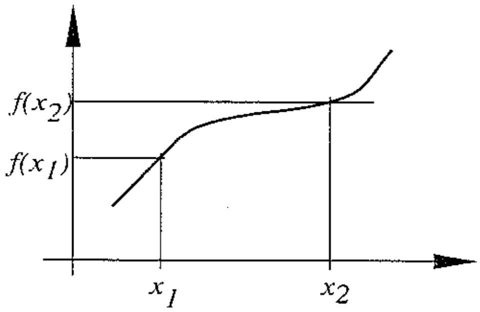
$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

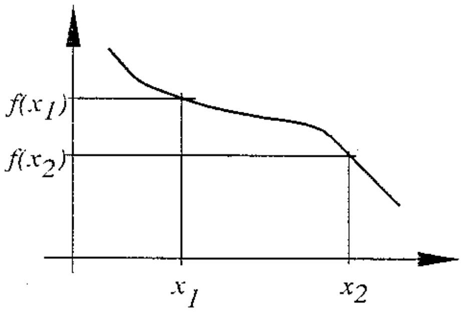




Az $f(x)$ **szigorúan monoton növő (szigorúan monoton csökkenő)** *(a, b)-n, ha minden $x_1 < x_2$ esetén*

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1,) > f(x_2).$$





Nyilvánvaló az alábbi fontos tétel:

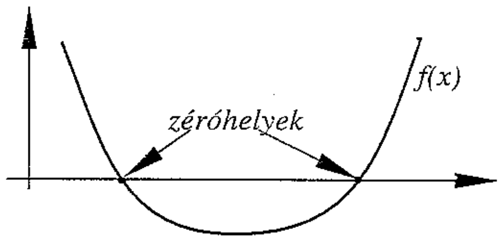
1.1. Tétel. *Az (a, b) intervallumon szigorúan monoton növő (csökkenő) $f(x)$ függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért létezik az inverze.*

A 1.12.1. pontban megmutatjuk, hogy az x^3 függvény szigorúan monoton növő $\mathbf{R}$-n, az x^2 függvény csökkenő $(-\infty, 0]$-n, és növő az $[0, \infty)$ félegyenesen.

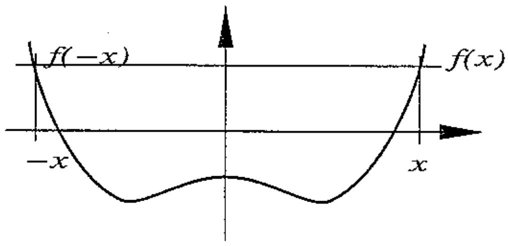
1.10. Néhány fontos tulajdonság

Tekintsük az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt. Az alábbiakban definiáljuk a legfontosabb tulajdonságokat. A következő fejezetek során az egyes függvények tárgyalásánál ezen tulajdonságokra részletesen kitérünk.

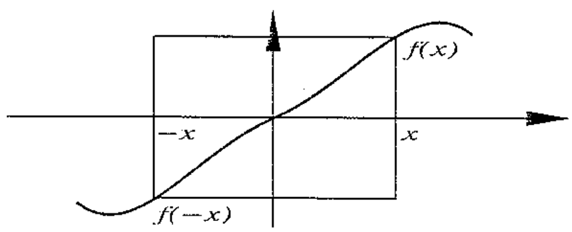
Azt mondjuk hogy x_0 **zéróhelye** *$f(x)$-nek, ha x_0 gyöke az $f(x_0) = 0$ egyenletnek.* Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldási módszere az $f(x)$ függvénytől függ.



Az $f(x)$ függvény **páros**, *ha $f(x) = f(-x)$. Az $f(x)$ grafikonja az y-tengelyre szimmetrikus.*

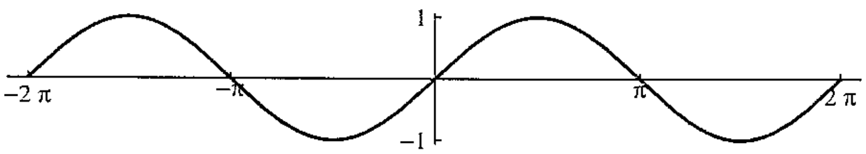


Az $f(x)$ **páratlan**, *ha $f(x) = -f(-x)$. Ekkor az $f(x)$ grafikonja az origóra középpontosan szimmetrikus.*

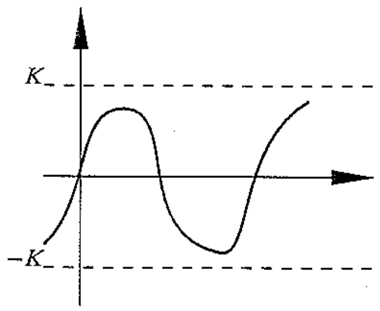


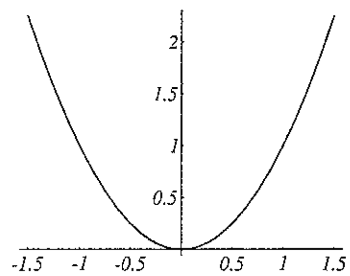
Az x^2 függvény páros, az x^3 pedig páratlan.

Az $f(x)$ függvény **periodikus** $p > 0$ **periódussal**, *ha minden $x \in D_f$-re $f(x+p) = f(x)$.* Ha p periódus, akkor bármely egész többszöröse is az. Elegendő a függvényt valamely $[x_0, x_0 + p)$ intervallumon megadni, ekkor a teljes értelmezési tartományon ismerjük. A $\sin x$ függvény periódusa 2π.



Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ *függvény* **korlátos** *valamely $H \subseteq \mathbf{R}$ halmazon, ha van olyan K szám, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in H$ esetén.*





Az $f(x) = x^2$ függvény nem korlátos a valós számok halmazán, de korlátos bármely $[a, b]$ véges intervallumon.

1.11. Egyenesek

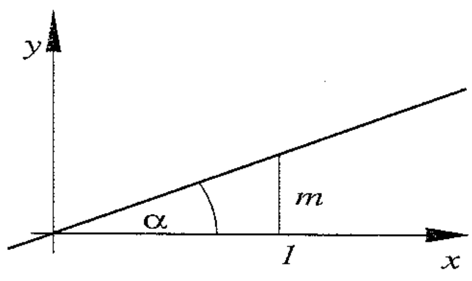
Két változó mennyiség egyenesen arányos egymással, ha hányadosuk állandó:

$$m = \frac{y}{x}.$$

Innen

$$y = m \cdot x,$$

azaz a kapcsolatot leíró függvény origón átmenő egyenes. Az m konstanst az egyenes meredekségének nevezzük, az y változó és az x változó viszonyát adja meg. Látható, hogy $m = \operatorname{tg} \alpha$, ahol α az x-tengely és az egyenes által bezárt szög.



Gyakori, hogy két változó mennyiség megváltozása egyenesen arányos egymással. *Azt mond-*

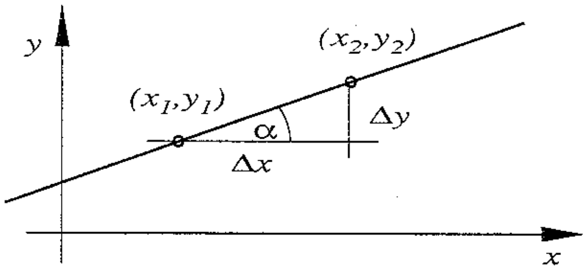
juk, hogy két változó között lineáris (egyenes) kapcsolat van, ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

azaz az y és x megváltozásának a hányadosa konstans. Másképpen fogalmazva, bármely két (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \text{konstans.}$$

Az ilyen törvénynek eleget tevő folyamatok képe egyenes.



Az egyenesek egyenletei

Legyen (x, y) az egyenes általános pontja (futópont). Mivel a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ összefüggés bármely két pontra teljesül, az alábbi egyenleteket kapjuk.

1. Ha (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontok adottak, akkor

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

ahonnan

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokon átmenő egyenes egyenlete.

2. Ha m és (x_0, y_0) adott, akkor

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

az (x_0, y_0) ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete. Speciálisan, ha m és a $(0, b)$ pont (az egyenes és az y- tengely metszéspontja) adott, akkor kapjuk az ismert

$$y = mx + b$$

egyenletet.

Egyenesek helyzete, metszéspontja

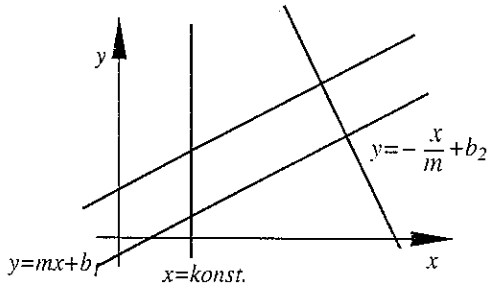
Tekintsük az

$$y = m_1 x + b_1, \quad y = m_2 x + b_2$$

egyeneseket. Az egyenesek párhuzamosak, ha $m_1 = m_2$ és merőlegesek, ha $m_1 \cdot m_2 = -1$.

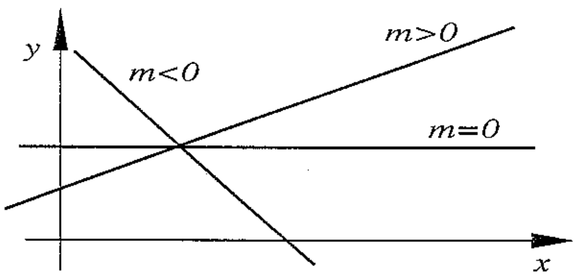
Két egyenes metszéspontját az egyenletekből alkotott egyenletrendszer megoldásával kapjuk. Nincs megoldás, ha az egyenesek párhuzamosak.

Vegyük észre, hogy az y tengellyel párhuzamos egyenesek, amelyek egyenlete $x =$ *konstans*, nem írhatók le a fenti módon a meredekség fogalmával. Ezek nem is függvények.



Míg a *meredekség nagysága az y megváltozásának a gyorsaságát jellemzi, meredekség előjele jellemzi a változás irányát.* Ha $m > 0$, akkor $\Delta y = m\Delta x > 0$, ha $\Delta x > 0$, y az x-szel együtt változik, azaz az $y = mx+b$ egyenes monoton nő. Ha $m < 0$, akkor az egyenes monoton csökken, az x növekedése az y csökkenését vonja maga után.

Ha $m = 0$, akkor az egyenes párhuzamos az x tengellyel, y konstans, függetlenül az x változásától.



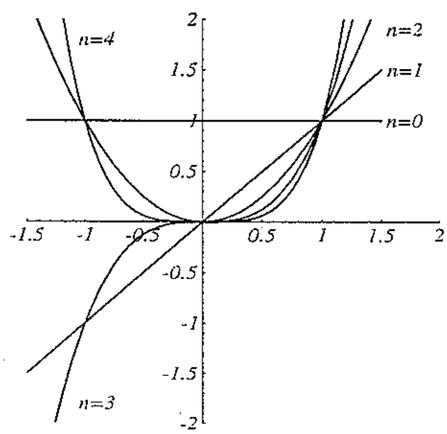
1.21. Példa. Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a kezdőponttól való távolságot az $s = v \cdot t + s_0$ összefüggés írja le.

1.22. Példa. Valamely test lassú melegítése során a felvett hőmennyiséget a $\Delta Q = mc\Delta T$ képlettel számoljuk ki, ahol m a test tömege, c a fajhő, ΔT a hőmérsékletváltozás.

1.12. Hatványfüggvények

1.12.1. Nemnegatív egész kitevő

Legyen n nemnegatív egész szám. Ekkor az $f_n(x) = x^n$ függvényt n-ed fokú hatványfüggvénynek nevezzük. Speciálisan, $f_0(x) = x^0 = 1$ konstans, $f_1(x) = x$ pedig lineáris függvény. Könnyen belátható, hogy ha $n = 2k$ páros, akkor $(-x)^{2k} = x^{2k} \geq 0$, azaz a függvény páros. Ha $n = 2k+1$, páratlan, akkor $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, azaz a függvény páratlan. Az egyetlen zéróhely az $x = 0$, és minden függvény grafikonja átmegy a koordinátarendszer $(1, 1)$ pontján. Az ábrán az x^0, x, x^2, x^3, x^4 függvények grafikonja látható.



Mivel az $0 \leq x_1, < x_2$ egyenlőtlenségből $x_1^n < x_2^n$ következik (bizonyítás!), a függvény szigorúan növő minden $n > 0$ esetén. A párosság ill. páratlanság miatt azonnal adódik, hogy az x^n függvény negatív x értékekre páros n esetén szigorúan csökkenő, páratlan n esetén szigorúan növő. Összehasonlítva az egyes hatványfüggvényeket, kapjuk, hogy ha $0 < x < 1$ és $n < m$, akkor

$$x^m = x^{n+m-n} = x^n \cdot x^{m-n} < x^n,$$

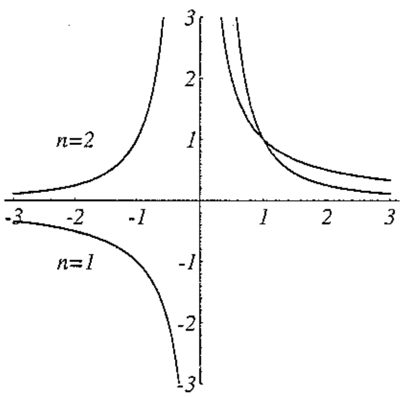
mivel $x^{m-n} < 1$. Ha pedig $x > 1$, akkor

$$x^m = x^{n+m-n} = x^n \cdot x^{m-n} > x^n.$$

1.23. Példa. Legyen m egy felnőtt ember testmagassága. Ekkor az F testfelszín és V testtérfogat kiszámítására használatosak az $F \approx k_1 m^2$ és $V \approx k_2 m^3$ közelítő formulák. Ezeknek a laboratóriumi gyakorlatban és gyógyszerek adagolásának meghatározásánál van haszna. A k_1, k_2 konstansok életkoronként és nemenként statisztikusan meghatározottak, de esetenként (kövér, sovány beteg) el lehet tőlük térni.

1.12.2. Az $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ függvények, negatív kitevőjű hatványok ($n \in N$)

Az $1/x^n = x^{-n}$ negatív kitevőjű hatványfüggvények az $x = 0$-ban nincsenek értelmezve. Az $1/x$ és $1/x^2$ függvények grafikonját az alábbi ábra tartalmazza.



Az előző pont egyenlőtlenségeiből adódik, hogy ha $x > 0$, akkor az x^{-n} függvény szigorúan monoton csökkenő. Ha $x > 1$ és $n > m$, akkor $x^{-n} < x^{-m}$. Ha pedig $0 < x < 1$ és $n > m$, akkor $x^{-n} > x^{-m}$.

Ezek a függvények az ismert fordított arányosságot ill. a magasabb rendű fordított arányosságot írják le.

1.24. Példa. Tekintsünk egy oldatot, legyen m az oldat tömege, m_o a benne oldott anyag tömege és c a töménység. Ha m_o adott és az oldószer mennyisége változhat, akkor a teljes tömeg és a koncentráció között az $m = 100 m_o / c$ összefüggés áll fenn.

1.12.3. Gyökfüggvények

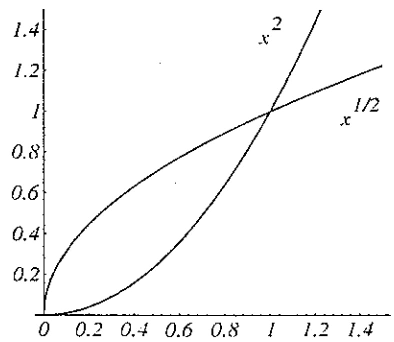
Tekintsük az $f(x) = y = x^{2k}$ függvényt (k pozitív egész). Mivel x^{2k} csak az $x \geq 0$ vagy az $x \leq 0$ félegyenesen szigorúan monoton, ezen félegyeneseken képezhetjük inverzét. Definíció szerint, ha $x \geq 0$, az $f(x) = y = x^{2k}$ inverze

$$\bar{f}(x) = \sqrt[2k]{x} = x^{1/(2k)}$$

az a nemnegatív szám, melyre $(\sqrt[2k]{x})^{2k} = x$. A függvények értelmezési tartománya a $[0, \infty)$ intervallum. Megjegyezzük, hogy a $\sqrt[2k]{x^{2k}}$ és $(\sqrt[2k]{x})^{2k}$ függvények nem azonosak. Speciálisan, az $f(x) = x^2$ inverze a $\sqrt{x}$ függvény ($x \geq 0$), és

$$\sqrt{x^2} = |x| \ (x \in R), \quad (\sqrt{x})^2 = x \ (x \geq 0).$$

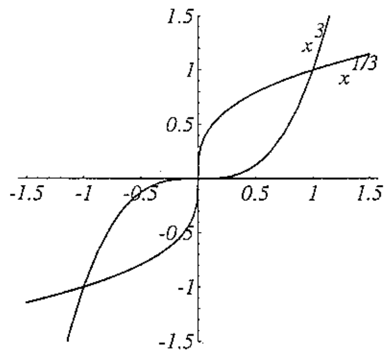
Az x^2 és $\sqrt{x}$ grafikonját az alábbi ábrán láthatjuk.



Most legyen $n = 2k + 1$, páratlan. Ekkor az $f(x) = x^{2k+1}$ függvény az egész számegyenesen monoton növő, tehát invertálható. Inverze az

$$\bar{f}(x) = \sqrt[2k+1]{x} = x^{1/(2k+1)}$$

jelenti azt a számot ($x < 0$ esetén negatív), amelyre $(\sqrt[2k+1]{x})^{2k+1} = x$. Az $f(x) = x^3$ és $\bar{f}(x) = \sqrt[3]{x}$ grafikonját láthatjuk az alábbi ábrán.



Hasonlítsuk össze az egyes $\sqrt[n]{x}$ függvényeket, ha $x \geq 0$. Az inverzképzés miatt (grafikusan az $y = x$ egyenesre való tükrözés), ha $0 < x < 1$ és $n < m$, akkor $\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x}$. Ha $1 < x$, akkor $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$.

1.12.4. Hatványfüggvények tetszőleges valós kitevővel

Hasonlóan az irracionális számok bevezetéséhez, az irracionális kitevőjű hatvány fogalmát is bevezethetjük. Legyen $x \geq 0$. Legyen α irracionális szám. Tekintsük az $\alpha = \sqrt{2}$ speciális esetet! Ismert, hogy az

$$a_1 = 1.4, \quad a_2 = 1.41, \quad a_3 = 1.414, \quad a_4 = 1.4142, \ldots$$

számok tetszőleges pontossággal megközelítik $\sqrt{2}$-t. Képezve az

$$x^{a_1}, \quad x^{a_2}, \quad x^{a_3}, \ldots, x^{a_n}, \ldots$$

racionális kitevőjű hatványokat (definiálva vannak!), bizonyítható, hogy tetszőleges pontossággal megközelítenek egy bizonyos A számot. Ezt nevezzük az $x^{\sqrt{2}}$ hatványnak. Ezt az eljárást minden $x \geq 0$ esetén elvégezve kapjuk az $x^{\sqrt{2}}$, minden irracionális α esetén elvégezve pedig x^{α} függvényt. A határérték tárgyalásánál (2. fejezet) látni fogjuk, hogy nem tettünk mást, mint képeztük a

$$x^{\sqrt{2}} := \lim_{n\to\infty} x^{a_n}$$

határértéket.

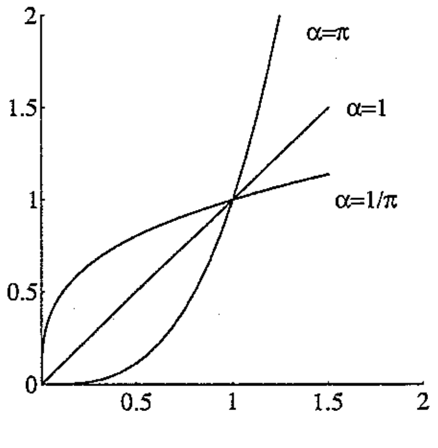
A hatvány fogalmát immár irracionális kitevőre is kiterjesztettük. A hatványozás azonosságai és a hatványokra vonatkozó egyenlőtlenségek a hatványozás negatív és törtkitevőre való kiterjesztése során végig érvényben maradtak. Ezeket ott elemi úton tudtuk bizonyítani. Az azonosságok és egyenlőtlenségek az irracionális kitevőre is érvényesek. Ez következik a "tetszőleges pontossággal való közelítés technikájából". A pontos bizonyítást mellőzzük.

Ha $x \geq 0$ és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, igazak az alábbi tulajdonságok:

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 < \alpha < \beta$, akkor $x^\alpha \geq x^\beta$. Ha pedig $1 \leq x$ és $0 < \alpha < \beta$, akkor $x^\alpha \leq x^\beta$.

Az $x^{1/\pi}, x^{1/\sqrt{2}}, x, x^{\sqrt{2}}, x^\pi$ függvények grafikonját az ábrán láthatjuk:

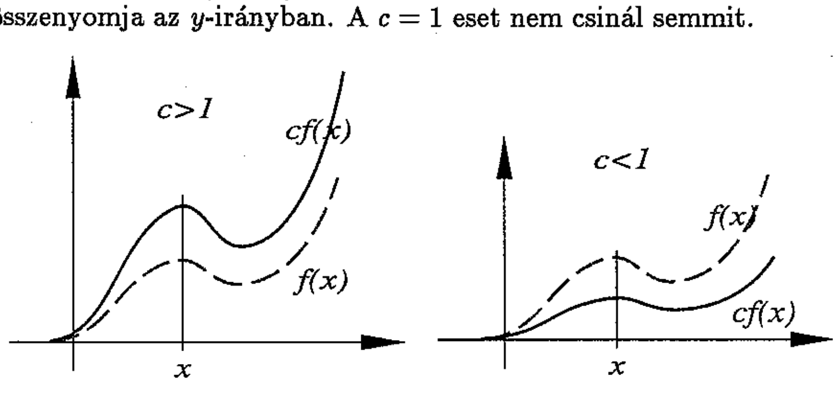


1.13. Függvénytranszformációk

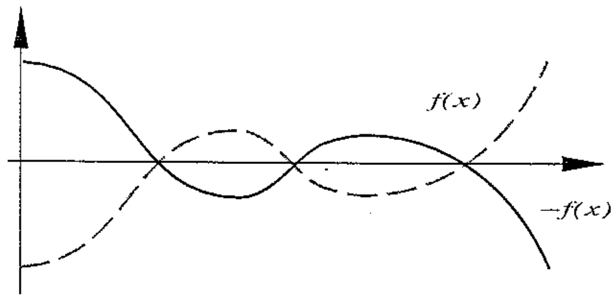
Ebben a pontban feltételezzük, hogy ismert az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény és grafikonja. Megvizsgáljuk, hogy a függvényen történt átalakítások hogyan hatnak az értelmezési tartományra, értékkészletre, grafikonra. Valamely transzformáció során keletkezett függvény vizsgálatát az eredeti $f(x)$ függvény vizsgálatára vezethetjük vissza. Fordítva, a transzformáció megkönnyítheti az eredeti függvény tanulmányozását, ábrázolását.

1.13.1. A $g(x) = c \cdot f(x)$ transzformáció

A $g(x) = c \cdot f(x)$ transzformáció adott c szám esetén az $x \to f(x) \to c \cdot f(x)$ hozzárendelést valósítja meg. Nyilvánvalóan $D_{c \cdot f} = D_f$. Legyen $c > 0$. Ha $c > 1$, akkor a grafikont megnyújtja, ha $c < 1$ akkor összenyomja az y-irányban. A $c = 1$ eset nem csinál semmit.

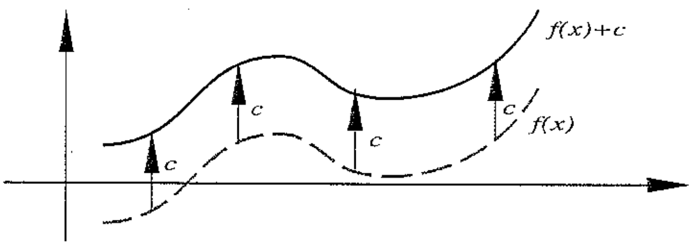


Ha $c < 0$, akkor a fentiekhez még egy x-tengelyre való tükrözés is járul. A $c = -1$ eset pedig ($g(x) = -f(x)$) az x-tengelyre való tükrözést jelenti.



1.13.2. A $g(x) = f(x) + c$ transzformáció

Most az $x \to f(x) \to f(x) + c$ hozzárendelést hajtjuk végre, ahol c tetszőleges konstans. Minden pontban az $f(x)$ értékekhez hozzáadjuk ugyanazt a számot, ami a grafikonon y-irányú eltolást jelent. $D_{f+c} = D_f$.

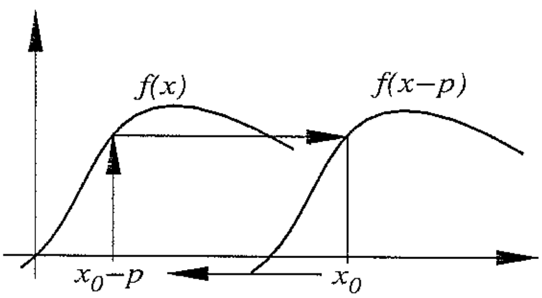


1.13.3. A $g(x) = f(x - p)$ transzformáció

Az $x \to x - p \to f(x - p)$ hozzárendelések végrehajtásával kapjuk a $g(x) = f(x - p)$ függvényt.

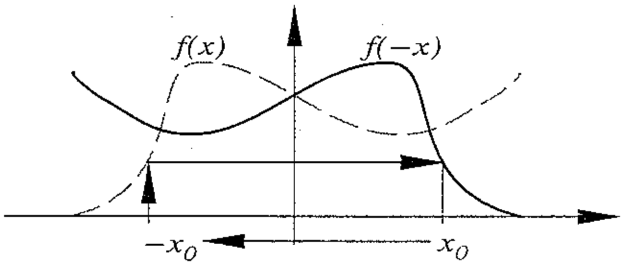
$$D_{f(x-p)} = \{x : \ x - p \in D_f\}.$$

Innen adódik, hogy az $f(x)$ grafikonját ismerve, az $f(x - p)$ grafikonját az x tengely mentén p értékekkel eltolva kapjuk meg. Ha $p > 0$ ez jobbra, ha $p < 0$, akkor balra történő eltolást jelent.



1.13.4. A $g(x) = f(-x)$ transzformáció

Ez a transzformáció az $f(x)$ grafikonját tükrözi az y-tengelye. Könnyű látni, hogy $D_{f(-x)} = \{x : -x \in D_f\}$.



1.14. Másodfokú függvények

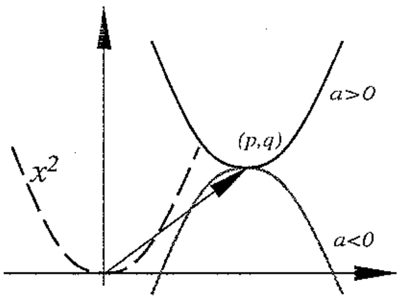
Az x^2 függvényre alkalmazva az x és y-irányú eltolást és a konstanssal való szorzást:

$$x \to (x-p) \to (x-p)^2 \to a(x-p)^2 \to a(x-p)^2 + q,$$

az

$$y = a(x-p)^2 + q$$

parabolát kapjuk. Ennek csúcspontja a (p, q) pont. Ha $a > 0$, akkor a parabola szárai felfelé, ha $a < 0$ lefelé állnak.



Mivel a parabola fenti képletétől a csúcspont koordinátáit közvetlenül leolvashatjuk, ezt *csúcsponti egyenletnek* nevezzük.

A parabola zéróhelyeinek (gyökeinek) kereséséhez megoldjuk az $a(x-p)^2 + q = 0$ egyenletet:

$$(x-p)^2 = -\frac{q}{a},$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{q}{a}} + p.$$

Nincs gyök, ha $q/a > 0$; egy gyök van, ha $q/a = 0$.

Ha a parabola a kanonikus

$$y = ax^2 + bx + c$$

alakban adott, akkor teljes négyzetté alakítással kaphatjuk a csúcsponti egyenletet. A gyökök ekkor:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ha $D = b^2 - 4ac > 0$, két gyök van; $D = 0$ esetben egy gyök van; $D < 0$ esetben nincs gyök. A kanonikus alakból könnyű megkapni a csúcspont koordinátáit (p, q), ha észrevesszük, ***hogy a parabola szimmetrikus a tengelyére***, az $\{x = p\}$ egyenesre nézve. Ezért

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = ap^2 + bp + c.$$

Ha x_1 és x_2 gyökök, akkor a parabola egyenlete

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

alakban is írható (gyöktényezős alak). A tényezőket összeszorozva, és a kapott formulát a kanonikus alakkal összehasonlítva kapjuk a gyökök és együtthatók összefüggéseit leíró Viete-képleteket:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2),$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

1.15. Polinomok

Ha adottak az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ számok, akkor a

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

alakú függvényeket n-ed fokú polinomoknak nevezzük. $P_n(x)$ minden valós x-re képezhető. A másodfokú függvényekhez hasonlóan, ha x_0 a $P_n(x)$ zéróhelye, akkor igaz a

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$$

összefüggés, ahol $Q_{n-1}(x)$ egy $(n-1)$-ed fokú polinom. A zéróhelyek keresésére azonban $n > 4$ esetén már nincs formula.

1.16. Racionális törtfüggvények

Legyenek $P_n(x)$ és $Q_m(x)$ polinomok. A

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

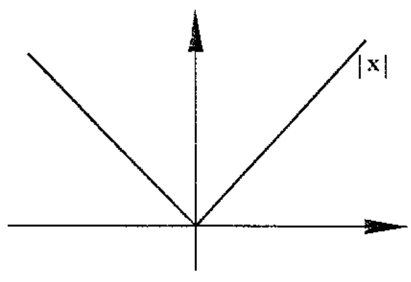
függvényt, a két polinom hányadosát, racionális törtfüggvénynek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a függvény nincs értelmezve a $Q_m(x)$ polinom zéróhelyeiben, és így a tört zéróhelyei megegyeznek a számláló $P_n(x)$ azon zéróhelyeivel, ahol a nevező nem nulla.

1.17. Az $f(x) = |x|$ függvény

Az

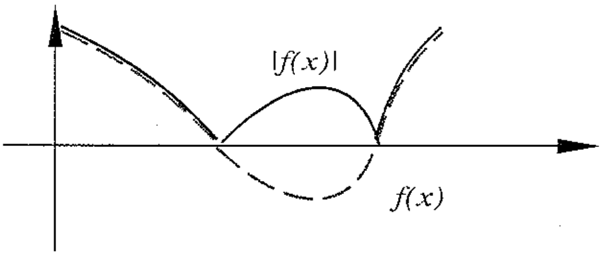
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

függvény minden valós számra képezhető, és grafikonja két egymáshoz illesztett, egymásra merőleges és az x-tengellyel $\pi/4$ szöget bezáró félegyenes.



Most képezzük az $|f(x)|$ összetett függvényt:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

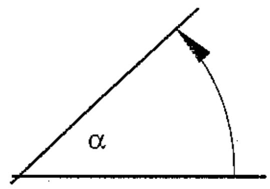


A grafikon x-tengely alatti részét tükrözzük az x-tengelyre. Nyilván $D_{|f|} = D_f$.

1.18. Trigonometrikus függvények

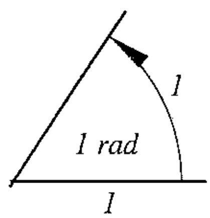
A szögmérés

Tekintsünk két, egy közös pontból induló félegyenest.

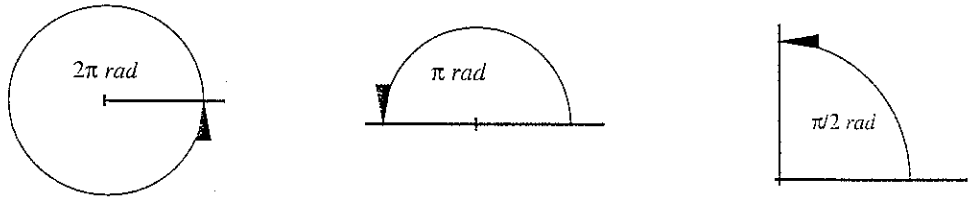


A két félegyenes által bezárt szöget az óramutató járásával ellenkező irányban mérjük fel. A mérésre két módszer ismert, mindkettő a O középpontú körök íveinek mérésén alapul. Először az O középpontú, tetszőleges kör kerületét 360 egyenlő részre, fokra osztjuk fel. A szöget a szög szárai közé eső fokok száma méri.

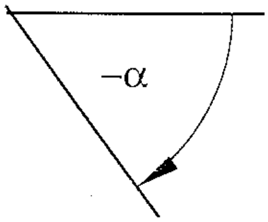
Bár a fokokkal való mérés eléggé egyszerű, sokkal természetesebb az ívmértékkel való szögmérés. Rajzoljunk az O pont köré egységsugarú kört. A szöget a szögszárak által kimetszett ív hosszával mérjük. 1 radián az 1 hosszú ívhez tartozó szög ($\approx 57^o$).



A teljes körhöz tartozó szög $360^\circ = 2\pi$ rad, az egyenesszög $180^\circ = \pi$ rad, és a derékszög $90^\circ = \pi/2$ rad:

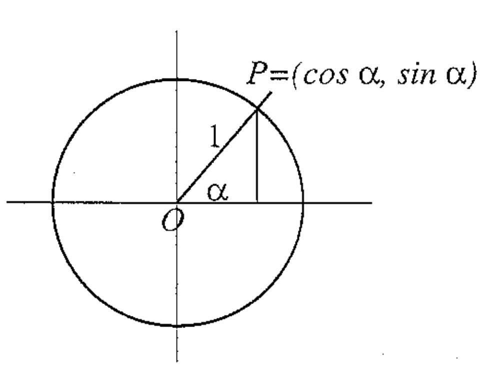


Negatív irányban mérve a szöget $-\alpha$-t kapunk.



A trigonometrikus függvények definíciója

Tekintsük az origó középpontú, egységsugarú kört az alábbi ábra szerint. Mérjük fel az α szöget az x-tengelyről pozitív irányban, legyen a szög szárának és a körvonalnak a metszéspontja P. Definíció szerint $\cos\alpha$ a P pont x-koordinátája, $\sin\alpha$ pedig a pont y-koordinátája.



Ez a definíció érvényes a 2π-nél nagyobb forgásszögekre is. Bevezetünk két újabb szögfüggvényt:

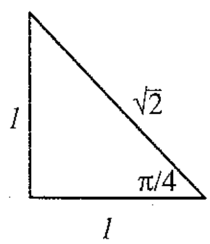
$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \overline{A_1B_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pm k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)
\end{aligned}$$

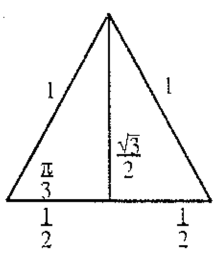
Néhány nevezetes értéket azonnal kapunk a definíció alapján.

$$\begin{array}{llllllll}
\sin 0 & = 0, & \cos 0 & = 1, & \operatorname{tg} 0 & = 0, & \operatorname{ctg} 0 & \text{nem def.-t,} \\
\sin\frac{\pi}{2} & = 1, & \cos\frac{\pi}{2} & = 0, & \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} & \text{nem def.-t,} & \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} & = 0, \\
\sin\pi & = 0, & \cos\pi & = -1, & & & & \\
\sin\frac{3\pi}{2} & = -1, & \cos\frac{3\pi}{2} & = 0, & & & & \\
\sin 2\pi & = 0, & \cos 2\pi & = 1. & & & &
\end{array}$$

Az egyenlő szárú derékszögű háromszög vizsgálatával, kapjuk hogy

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$





Az egyenlő oldalú háromszögből pedig

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A definícióból a Pithagorasz tétellel azonnal kapjuk a $\sin x$ és $\cos x$ közötti alapvető összefüggést:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Az egységsugarú körre pillantva azonnal adódnak további fontos összefüggések:

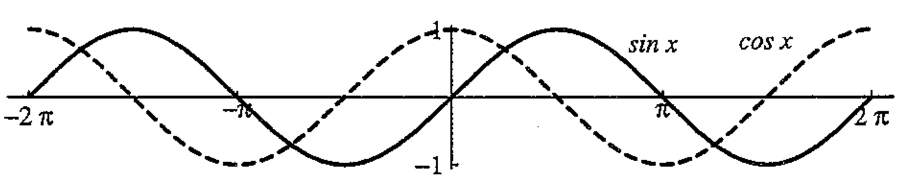
$$\begin{array}{lll lll l}
\sin(\alpha+2\pi) & = & \sin\alpha & \cos(\alpha+2\pi) & = & \cos\alpha & (\text{ A periódus } 2\pi) \\
\mathrm{tg}(\alpha+\pi) & = & \mathrm{tg}\,\alpha & \mathrm{ctg}\,(\alpha+\pi) & = & \mathrm{ctg}\,\alpha & (\text{ A periódus } \pi) \\
\cos\alpha & = & \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}), & \mathrm{ctg}\,\alpha & = & \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) & \\
\sin(-\alpha) & = & -\sin\alpha & \cos(-\alpha) & = & \cos\alpha &
\end{array}$$

Az addíciós tételek igazolása a középiskolás tankönyvekben megtalálható:

$$\begin{array}{lll lll}
\sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta, & \sin 2\alpha & = & 2\sin\alpha\cdot\mathrm{co} \\
\cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta, & \cos 2\alpha & = & \cos^2\alpha-\mathrm{si}
\end{array}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}, \qquad \mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

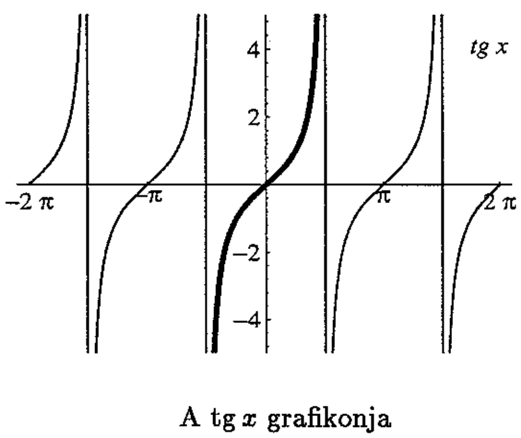
A függvények grafikonjai



A $\sin x$ és $\cos x$ grafikonja

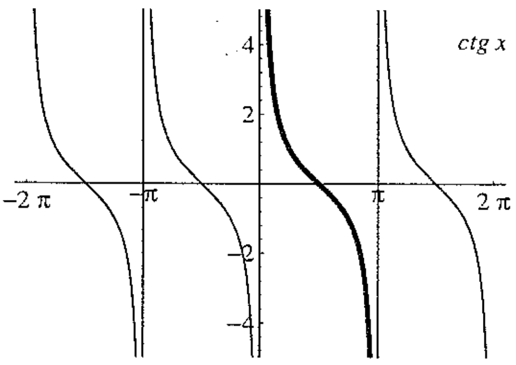
A $\sin x$ monoton növő a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ szakaszon. Itt invertálható. Inverze az $\arcsin x$. A $\sin x$ maximumát az $x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$, minimumát az $x = -\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$ helyeken veszi fel, zéróhelyei $x = \pm k\pi$ $(k = 0, 1, 2\ldots)$.

A $\cos x$ nevezetes pontjainak keresését a $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ azonosságot felhasználva az olvasóra bízzuk. A $[0, \pi)$ szakaszon szigorúan monoton csökkenő, inverze itt $\arccos x$.



A $\mathrm{tg}\,x$ grafikonja

A $\operatorname{tg} x$ értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \pm k\pi;\ k = 0, 1, 2 \ldots\}$ halmaz. Monoton növő a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ és minden $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ szakaszon. A $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon vett inverze $\operatorname{arctg} x$.

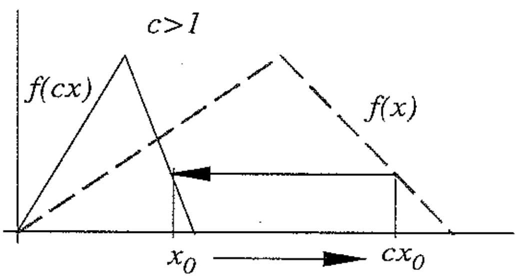


A $\operatorname{ctg} x$ grafikonja

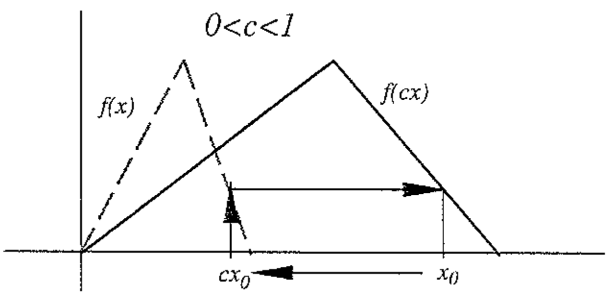
A $\operatorname{ctg}\ x$ értelmezési tartománya $\mathbf{R} \setminus \{\pm k\pi; k = 0, 1, 2, 3 \ldots\}$. Nevezetes pontjainak keresését az olvasóra bízzuk. Monoton csökkenő a $(0, \pi)$ és minden $(k\pi, (k+1)\pi)$ intervallumon. A $(0, \pi)$ intervallumon vett inverze az $\operatorname{arcctg} x$ függvény.

1.19. Függvénytranszformációk, folytatás: a $g(x) = f(cx)$, $(c > 0)$ transzformáció

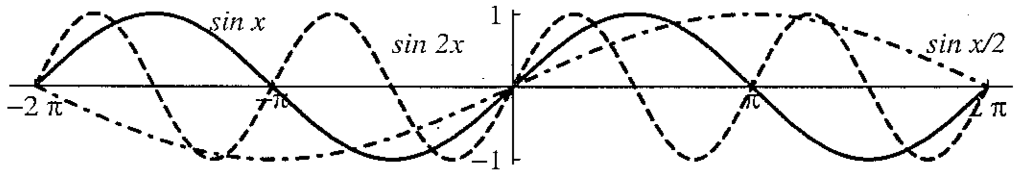
Legyen $c > 1$. Ekkor $cx > x$, a transzformált függvény az x helyen az f függvény cx helyen felvett értékét kapja. A grafikon az x tengely mentén "c-ed" részére zsugorodik.



Ha $0 < c < 1$, akkor, éppen fordítva, az x-tengely mentén történő nyújtásról beszélünk. Ugyanis ekkor $cx < x$, és a transzformáció a cx helyen felvett értéket "húzza ki" az x helyre.

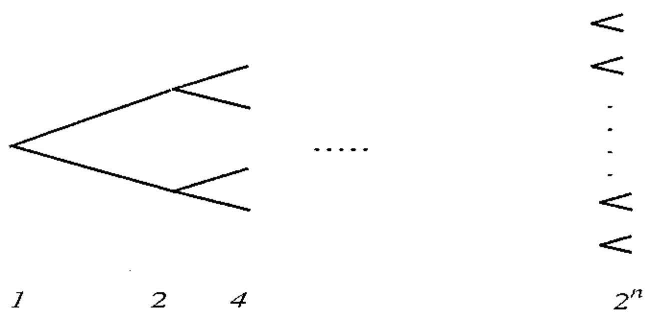


1.25. Példa. A periódikus folyamatok leírásánál hasznosak a $\sin cx$ és $\cos cx$ függvények, amelyek periódusa $2\pi/c$. A $\sin 2x$, $\sin x$ és $\sin x/2$ grafikonja látható az alábbi ábrán.



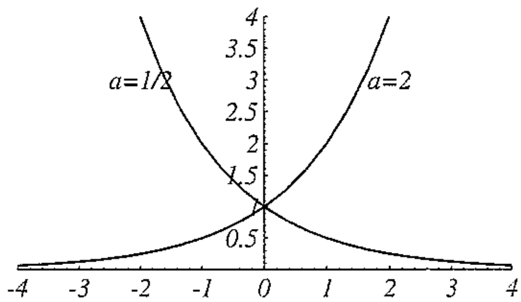
1.20. Az exponenciális függvény

Tekintsük a sejtosztódás folyamatát. Tegyük fel, hogy minden sejt másodpercenként osztódik, és a 0-ik másodpercben 1 sejt van. Az első másodpercben 2, a 2-ikban 4, a harmadikban 8, és így tovább,



az n-ik másodpercben pedig 2^n sejt van. Itt a hatványfüggvényekkel ellentétben nem az alap, hanem a kitevő változik.

Általában, *ha hatványozásnál az* $a > 0$ $(a \neq 1)$ *alap rögzített, és az* $x \in \mathbf{R}$ *kitevő a változó, akkor az* a^x *exponenciális függvényt kapjuk.* Mivel a hatványt minden valós x kitevőre definiáltuk, az a^x függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza $(D = \mathbf{R})$. Nyilvánvalóan $a^x > 0$ minden x esetén, vagyis az értékkészlet $R^+ = (0, \infty)$. A hatványokra vonatkozó egyenlőtlenségek miatt, ha $a > 1$, akkor a^x növekvő $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$, és ha $0 < a < 1$, akkor csökkenő $(x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$. A 2^x és $(1/2)^x$ grafikonját láthatjuk az alábbi ábrán:



Mivel $(1/a)^x = a^{-x}$, ezért az $(1/a)^x$ és a^x függvények grafikonja egymás tükörképei az y-tengelyre vonatkozóan.

A hatványozás azonosságai miatt

$$a^0 = 1, \qquad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \qquad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}.$$

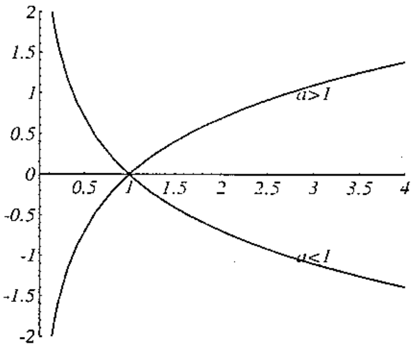
Könnyen látható, hogy $a^x \to \infty$, ha $x \to \infty$, és $a^x \to 0$, ha $x \to -\infty$ ($a > 1$-esetén). A "$\to \infty$", "$\to 0$" jelölések azt jelentik, hogy a nyíl előtt levő kifejezés minden határon túl közeledik a végtelenhez illetve nullához. Ezt a fogalmat pontosan a határértékekről szóló 2. fejezetben tárgyaljuk.

1.21. A logaritmus függvény

Mivel az $f(x) = a^x$ kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton), ezért invertálható. Inverze

$$\bar{f}(x) = \log_a x$$

azt a számot jelenti, amelyre mint kitevőre, a-t emelve x-t kapunk. Az $\log_a x$ grafikonját mutatja a következő ábra $a > 1$ és $0 < a < 1$ esetén



Nyilvánvaló, hogy az értelmezési tartomány $D_{\log} = (0, \infty)$, az értékkészlet $R_{\log} = \mathbf{R}$, és a $\log_a x = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$. A logaritmusra vonatkozó legfontosabb azonosságok:

$$\begin{aligned}
\log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a x^\alpha &= \alpha \log_a x \\
\log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy

$$a^{\log_a x} = x, \quad \text{ha} \quad x > 0,$$

és

$$\log_a a^x = x, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbf{R},$$

a két függvény tehát nem azonos.

1.22. Logaritmikus függvénytranszformációk, logaritmikus skálák

Az exponenciális függvények vizsgálatát és ezáltal számos gyakorlati probléma megoldását nagymértékben megkönnyíti az alábbiakban vázolandó transzformáció, melynek segítségével az exponenciális függvények grafikonját egyenesként rajzolhatjuk meg. Az eljárást példákon keresztül mutatjuk be.

Tekintsük az

$$f(x) = 10^{3x}$$

függvényt. Ennek grafikonját ismerjük, de nyilvánvaló, hogy a megközelítően pontos ábrázolás is nehézségekbe ütközik.

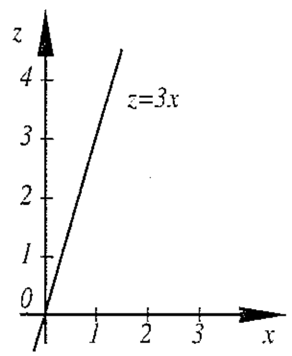
Vegyük az

$$y = 10^{3x}$$

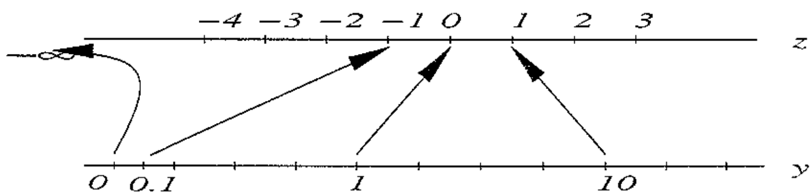
egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát:

$$z = \lg y = 3x.$$

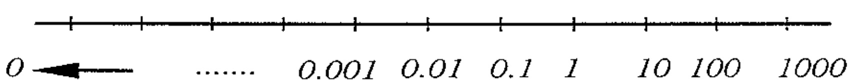
A kapott z változó lineárisan függ x-től, ezért grafikonja egyenes az (x, z) koordinátarendszerben.



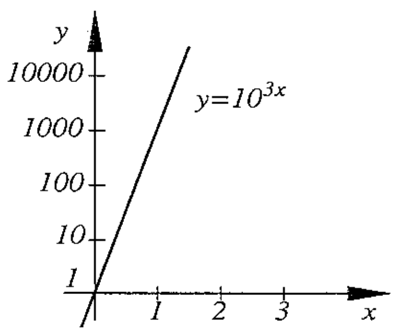
A $z = \lg y$ kölcsönösen egyértelmű, ezért az egyenletes z-beosztást megcímkézhetjük a megfelelő $y = 10^z$ értékekkel, azaz a $\lg y$ helyhez y-t írunk.



A transzformált z tengelyt a megfelelő y-értékekkel megcímkézve, egy úgynevezett logaritmikus skálát kapunk, ahol a skála $-\infty$- helyett 0-val kezdődik és a nulla helyett 1 van.



Látható, hogy 10^n és 10^{n+1} között ugyanakkora a távolság minden n esetén.
Az $y = 10^{3x}$ függvényre kapjuk az alábbi grafikont:



Természetesen más alapú logaritmus is használható. A logaritmus azonosságai miatt a különböző alapú logaritmusok alapján készült skálák csak egy konstans szorzóban térnek el egymástól, ezért az egyenes meredeksége lesz más.

Az orvostudományban és a gyógyszerésztudományban ennek az ábrázolásnak rendkívüli szerepe van, hiszen számos folyamat exponenciális csökkenést vagy növekedést mutat. A kísérletek eredményeinek ábrázolását gyakran előre gyártott "logaritmikus mm-papír" segíti, amely bármilyen alapú logaritmus szerinti ábrázoláshoz megfelel, figyelembe véve az átírásra vonatkozó összefüggést. Manapság papír helyett inkább számítógépeket használunk.

A fenti esetben és általában az exponenciális függvények esetén az y-tengelyt transzformáljuk.

Más esetekben az x-tengely logaritmikus transzformációjára is szükség lehet.

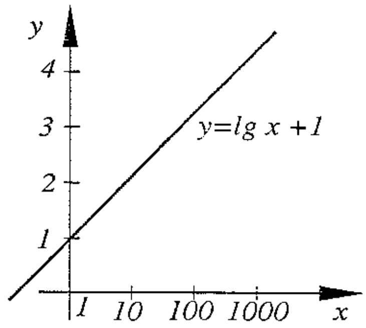
Tekintsük az

$$y = \lg x + 1$$

függvényt. Ha bevezetjük az $u = \lg x$ helyettesítést, akkor az

$$y = u + 1$$

egyenest kapjuk, amelynek képe az (u, y) rendszerben egyenes. Mivel az $x \to u$ kapcsolat kölcsönösen egyértelmű, az u-tengelyt címkézhetjük a megfelelő x értékekkel. Ez hasonló az előbbiekhez, de most az x-tengelyt torzítjuk logaritmikusan.



Az $y = (\lg x)^3 + 1$ függvényt pedig ebben a koordinátarendszerben ábrázolva az $y = u^3 + 1$ görbét kapnánk.

A fenti ábrázolásokat **szemilogaritmikusnak** nevezzük, mivel csak az egyik koordinátatengelyt transzformáljuk.

Mindkét tengely transzformációjára szükség van, ha valamely hatványfüggvényt, például a

$$y = 100 \cdot x^{-2}$$

függvényt szeretnénk egyenessé transzformálni. Mindkét oldal logaritmusát (pl. lg) véve

$$\lg y = -2 \lg x + 2$$

Bevezetve a $z = \lg y$ és $u = \lg x$ változókat, a

$$z = 2 - 2u$$

egyenest kapjuk az (u, z) rendszerben. Mindkét tengelyt az eredeti x, y-értékekkel megcimkézve kapjuk a függvény **logaritmikus** ábrázolását.