4. Kartell két vállalat esetén

Ebben a fejezetben azzal az esettel foglalkozunk, amikor a piacot két vállalat uralja és ezek összejátszanak. A vállalatok együttműködését kartellnek nevezzük. Gondolhatunk úgy is a kartellre, mint egy monopóliumra. Ekkor a kartell által maximalizálni kívánt profit az iparági összprofit, majd ezt a profitot osztják fel egymás között. A szakirodalom alapján eltérő költségek esetén általában azok arányában osztoznak a bevételen és a profiton [11].

4.1. Időben állandó modell

A keresleti súlyozás figyelembe vételével a módosított termelt összmennyiség:

$$Q = w\,q_1 + (1-w)\,q_2 \quad (0 \le w \le 1).$$

Az egységár pedig csak Q függvénye, feltéve hogy a vállalatok által kibocsátott termékek árai azonosak:

$$P = P(Q).$$

A teljes bevételfüggvények itt is az árak és az egyes cégek által kibocsátott mennyiségek szorzatai.

$$\mathrm{TR}_1 = P\,q_1, \qquad \mathrm{TR}_2 = P\,q_2$$

A profitfüggvény:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2,$$

ahol az egyes cégek egyéni profitjai az előző fejezet alapján határozható meg.

A reakciógörbék az alábbi egyenletrendszer megoldásai:

$$\partial_{q_1}\pi = 0, \quad \partial_{q_2}\pi = 0. \tag{1}$$

Ebben az esetben is a Cournot-féle megoldás, amikor a két reakciógörbe metszi egymást. Ekkor a közös profit maximális.

Az előző fejezet statikus modelljéhez hasonlóan (1) a határköltségek és határbevételek segítségével az alábbi formában is kifejezhető:

$$\mathrm{MR}_1(Q) = \mathrm{MC}_1(q_1), \quad \mathrm{MR}_2(Q) = \mathrm{MC}_2(q_2).$$

Együttműködés esetén mindegy, hogy a kibocsátást melyik vállalat termelte, így $\mathrm{MR}_1(Q) = \mathrm{MR}_2(Q)$. Ekkor $\mathrm{MC}_1(q_1) = \mathrm{MC}_2(q_2)$ [11]. A kartellmegállapodás szerint annak a vállalatnak többet kell termelnie, amelyiknek határköltség-görbéje a másiké alatt halad [10].

1. PÉLDA

Tegyük fel, hogy a két nagy kólagyártó cég kartellt alkot. A harmadik fejezet első példája alapján az árfüggvény:

```
Clear["Global`*"]
```

```
Price = 20 - 2 qc - qp;
```

A költség- és bevétel-függvények:

```
TCCoke = 5 qc; TCPepsi = 5 qp;
```

```
TRCoke = Price qc; TRPepsi = Price qp;
```

A profitfüggvények:

```
πCoke = Expand[TRCoke - TCCoke]
```

$15\,qc - 2\,qc^2 - qc\,qp$

```
πPepsi = Expand[TRPepsi - TCPepsi]
```

$15\,qp - 2\,qc\,qp - qp^2$

A modell a versenyhez képest annyiban módosul, hogy itt az iparági összprofittal dolgozunk, azaz:

```
πkozos = πCoke + πPepsi
```

$15\,qc - 2\,qc^2 + 15\,qp - 3\,qc\,qp - qp^2$

A reakciógörbéket az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

```
solCoke = Simplify[Solve[∂qc πkozos == 0, qc]][[1, 1]]
```

$qc \to -\frac{3}{4}\,(-5 + qp)$

```
solPepsi = Simplify[Solve[∂qp πkozos == 0, qp]][[1, 1]]
```

$qp \to -\frac{3}{2}\,(-5 + qc)$

Ekkor a Cournot-megoldás

```
Sol = Solve[{qc == solCoke[[2]], qp == solPepsi[[2]]}, {qc, qp}]
{{qc → 15, qp → -15}}
```

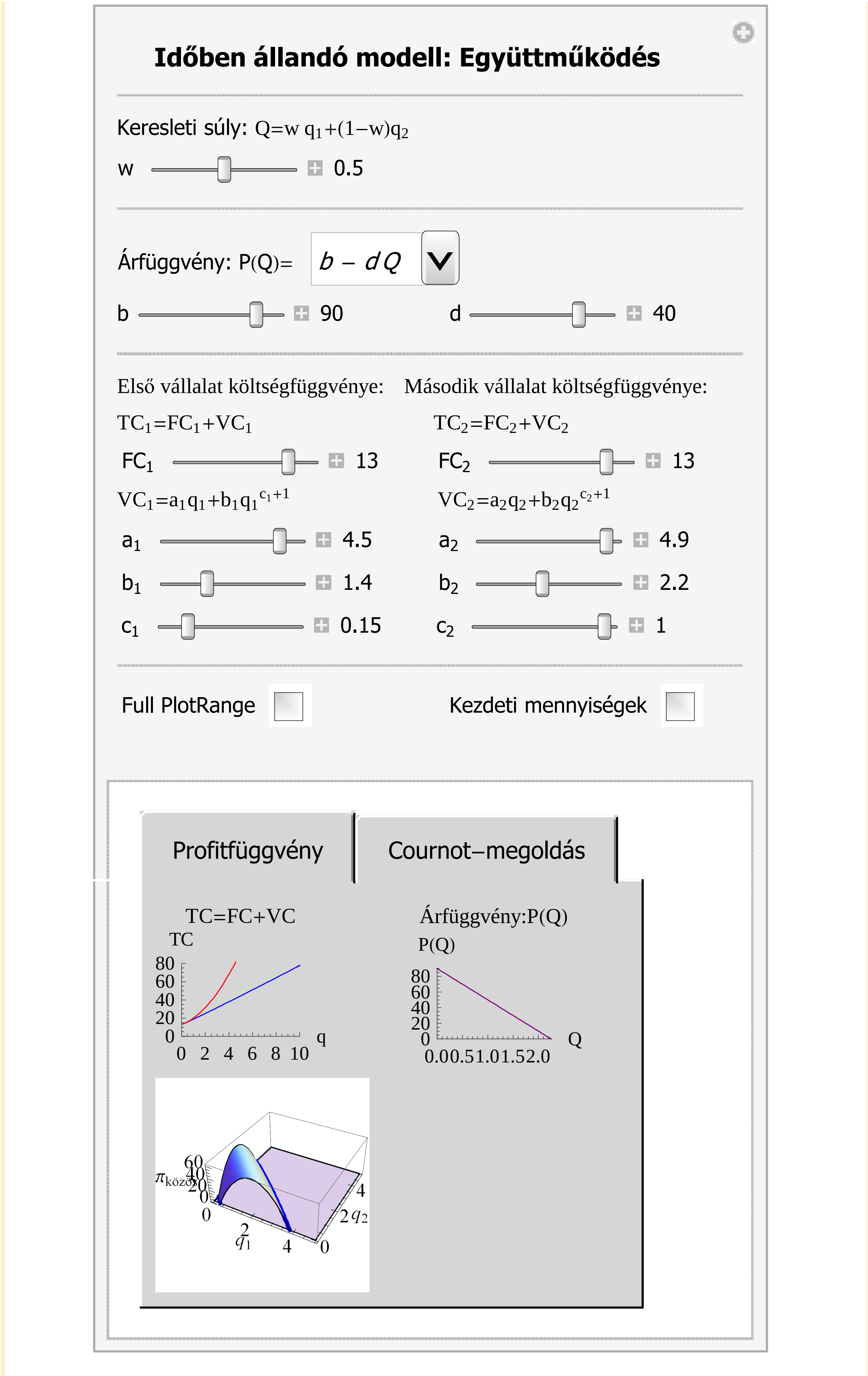
Összejátszás esetén a Cournot-megoldásnál az egyik cégnek negatív mennyiséget kellene kibocsátania, ami lehetetlen. Így ebben az esetben a kartell nem célravezető.

Interaktív kísérletek

A következő interaktív illusztráció a harmadik fejezetben bemutatott illuszrtáció együttműködést modellező változata.

A program a “Cournot-megoldás” fül esetén a “Nincs Cournot-megoldás!” szöveget írhatja ki:

– ugyanazon esetekben, mint a harmadik fejezet interaktív ábrája.
– Továbbá a közös profit lehetséges értékeivel dolgozik (nem negatív, nem komplex).



Speciális esetek

Ebben az esetben a piacon jelenlevő vállalatok monopóliumot alkotnak. A kibocsátott mennyiségek a kartell megállapodás szerint vannak korlátozva, a profitot pedig arányosan osztják fel egymás között.

1. KÍSÉRLET Lineáris árfüggvény

Alkalmazzuk az alábbi beállításokat a modellre!

$w = 0.5,$
$P(Q) = b - d\,Q,$
$b = 90,\ d = 40,$
$\mathrm{FC}_1 = 13,\ \mathrm{FC}_2 = 13,$
$a_1 = 4.5,\ b_1 = 1.4,\ c_1 = 0.15,$
$a_2 = 4.9,\ b_2 = 2.2,\ c_2 = 1.$

Összehasonlítva az itt realizálható profitokat a versengés esetével, kapjuk, hogy a két cég együttműködése nagyobb profitot jelent mind ágazati mind pedig vállalat szinten.

A modell nagyon érzékeny a paraméterek változtatására, mind a költségeket, a keresleti súlyt és az árfüggvényt tekintve.

2. KÍSÉRLET Hiperbolikus árfüggvény

Legyenek a beállítások a következőek:

$w = 0.5,$
$P(Q) = d\,Q^{-\epsilon},$
$d = 40,\ \epsilon = 0.5,$
$\mathrm{FC}_1 = 13,\ \mathrm{FC}_2 = 13,$
$a_1 = 5,\ b_1 = 1.5,\ c_1 = 0.2,$
$a_2 = 5,\ b_2 = 1.5,\ c_2 = 0.2.$

Az megoldás létezése ebben az esetben is érzékeny a paraméterek változtatására. Kis ϵ-ra érdemes vizsgálatokat végezni, ahol a vállalatok költségei magasak. A megoldás létezését a keresleti súly is nagy mértékben befolyásolja. A versengéssel összehasonlítva a vállalatok magasabb profitot realizálnak az egyensúlyi helyzetben, és az egyensúlyi ár is magasabb, tehát ez a piaci forma a fogyasztók számára kevésbé kecsegtető.

4.2. Időben diszkrét modell

Ezzel az esettel nem foglalkozunk. Együttműködés esetén a kartell csoportos monopóliumként hozza meg döntéseit a piacon, így adott $[t,\ t+1]$ periódusban mindkét cég által ismert mind saját, mind a másik vállalat aktuális periódusbeli kibocsátási szintje.

4.3. Időben folytonos modell

Ismételten felelevenítjük a modellhez szükséges jelöléseket. A teljes bevételek:

$$\mathrm{TR}_1 = P\,q_{1,}$$
$$\mathrm{TR}_2 = P\,q_2.$$

A teljes költségek:

$$\mathrm{TC}_1 = \mathrm{AC}_1(q_1)\,q_1 = \mathrm{FC}_1 + \mathrm{VC}_1(q_1) = \mathrm{FC}_1 + a_1\,q_1 + b_1\,q_1{}^{c_1+1},$$
$$\mathrm{TC}_2 = \mathrm{AC}_2(q_2)\,q_2 = \mathrm{FC}_2 + \mathrm{VC}_2(q_2) = \mathrm{FC}_2 + a_2\,q_2 + b_2\,q_2{}^{c_2+1}.$$

A közös profit:

$$\pi_{\text{közös}} = \pi_1 + \pi_2 = (\mathrm{TR}_1 - \mathrm{TC}_1) + (\mathrm{TR}_2 - \mathrm{TC}_2).$$

A harmadik fejezetben leírtak alapján a következő egyenletrendszert vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} q_1'(t) &= k_1(x_1(t) - q_1(t)), \\ q_2'(t) &= k_2(x_2(t) - q_2(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

ahol x_1 és x_2 a kívánt kibocsátási szintek, $k_{1,2} > 0$ konstans értékek. Ezeken a szinteken a vállalatok profitja maximális feltéve, hogy a másik vállalat nem változtat a kibocsátáson. Mivel most a közösen elérető profit maximalizálása a cél, az $x_1(t)$ és $x_2(t)$ az

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1(t)}\pi_{\text{közös}}(t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_2(t)}\pi_{\text{közös}}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

egyenletek megoldásai, ahol $\pi_{\text{közös}} = \pi_1 + \pi_2$.

A rendszer stanilitását az előző fejezethez hasonlóan lineáris árfüggvény és lineáris vagy négyzetes költségfüggvények mellett tekintjük. A többi esetben a numerikus számolás nehézkes, így azokat az interaktív kísérletek keretein belül, tapasztalati úton vizsgáljuk.

4.3.1. Lineáris ár, lineáris, vagy négyzetes költségek

A (2) rendszer ekkor a

$$\begin{aligned} q_1'(t) &= k_1(a\,q_2(t) + b - q_1(t)) \\ q_2'(t) &= k_2(c\,q_1(t) + d - q_2(t)) \end{aligned}$$

alakban is felírható. A rendszer egyensúlyi helyzete ismételten:

$$q_1 = -\frac{b+a\,d}{-1+a\,c},$$
$$q_2 = -\frac{b\,c+d}{-1+a\,c}.$$

Az előző fejezetben ismertetettek alapján az ott kimondott tétel ezen modell esetén is érvényes. Az eredmény annak következtében módosul, hogy a várt kibocsátási szinteket meghatározó (3) egyenletrendszerben a közös profitfüggvénnyel dolgozunk.

A harmadik fejezetben kimondott tétel alapján a következő eseteket vizsgáljuk:

Eh. stabilitása	$a\,c < 1$	$a\,c = 1$	$a\,c > 1$
$k_1 = k_2$	aszimptotikusan stabil	nem tudjuk	instabil
$k_1 \neq k_2$ és $4\,a\,c + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} < 2$	aszimptotikusan stabil	aszimptotikusan stabil	aszimptotikusan stabil
$k_1 \neq k_2$ és $4\,a\,c + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \geq 2$	aszimptotikusan stabil	nem tudjuk	instabil

(4)

2. PÉLDA

Az első példát folytonos időben vizsgáljuk.

```
Clear[Price, TCCoke, TCPepsi, TRCoke, TRPepsi, πCoke, πPepsi,
  πkozos, solCoke, solPepsi, solCokem, Eqn2D, ICeqn2D, Rhs2D]
```

Az árfüggvény:

```
Price[t] = 20 - 2 qc[t] - qp[t];
```

A költség- és bevételfüggvények:

```
TCCoke[t] = 5 qc[t]; TCPepsi[t] = 5 qp[t];
```

```
TRCoke[t] = Price[t] qc[t]; TRPepsi[t] = Price[t] qp[t];
```

A profitok:

```
πCoke[t] = Expand[TRCoke[t] - TCCoke[t]]
```

$15\,qc[t] - 2\,qc[t]^2 - qc[t]\,qp[t]$

```
πPepsi[t] = Expand[TRPepsi[t] - TCPepsi[t]]
```

$15\,qp[t] - 2\,qc[t]\,qp[t] - qp[t]^2$

```
πkozos[t] = πCoke[t] + πPepsi[t]
```

$15\,qc[t] - 2\,qc[t]^2 + 15\,qp[t] - 3\,qc[t]\,qp[t] - qp[t]^2$

Az egyenletrendszer:

```
qc'[t] = kc (xc[t] - qc[t]);
qp'[t] = kp (xp[t] - qp[t]);
```

A kívánt kibocstások:

```
xc[t] = Simplify[Solve[∂qc[t] πkozos[t] == 0, qc[t]]][[1, 1, 2]]
```

$$-\frac{3}{4}(-5+qp[t])$$

```
xp[t] = Simplify[Solve[∂qp[t] πkozos[t] == 0, qp[t]]][[1, 1, 2]]
```

$$-\frac{3}{2}(-5+qc[t])$$

Melyeket behelyettesítve az egyenletrendszerbe kapjuk:

```
qc'[t] = Expand[kc (xc[t] - qc[t])]
qp'[t] = Expand[kp (xp[t] - qp[t])]
```

$$\frac{15\,kc}{4} - kc\,qc[t] - \frac{3}{4}\,kc\,qp[t]$$

$$\frac{15\,kp}{2} - \frac{3}{2}\,kp\,qc[t] - kp\,qp[t]$$

A stabilitást meghatározó két együttható:

```
Coefficient[qc'[t] / kc, qp[t]]
Coefficient[qp'[t] / kp, qc[t]]
```

$$-\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{2}$$

A (4) alkalmazásával ezen együtthatók szorzatára kapjuk, hogy: $\frac{9}{8} > 1$, tehát a $k_1 = k_2$ esetben az egyensúlyi helyzet instabil.

```
Clear[Eqn2d, qC, qP, k, sol, Eh]
```

A differenciálegyenlet $q_c(0) = 10$ és $q_p(0) = 20$ kezdeti értékek esetén:

```
Eqn2D = {
   qC'[t] == 15 k / 4 - k qC[t] - 3 / 4 k qP[t],
   qP'[t] == 15 k / 2 - 3 / 2 k qC[t] - k qP[t]};
Rhs2D = {15 k / 4 - k qC - 3 / 4 k qP, 15 k / 2 - 3 / 2 k qC - k qP};
```

```
ICeqn = {qC[0] == 10, qP[0] == 20};
```

Az egyensúlyi helyzet:

```
Eh = Solve[Rhs2D == {0, 0}, {qC, qP}]
{{qC → 15, qP → -15}}
```

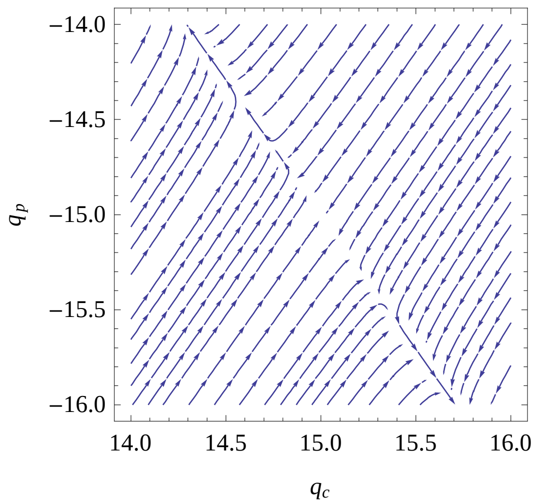
Tehát az egyensúlyhoz a második vállalatnak negatív mennyiséget kellene termelnie, ami a gyakortalban lehetetlen.

A megoldás $k = 1$ érték esetén:

```
k = 1;
NDSolve[Join[Eqn2D, ICeqn], {qC[t], qP[t]}, {t, 0, 500}];
```

```
sol[t] = {qC[t], qP[t]} /.
   NDSolve[Join[Eqn2D, ICeqn], {qC[t], qP[t]}, {t, 0, 500}];
```

A megoldást ábrázolva:



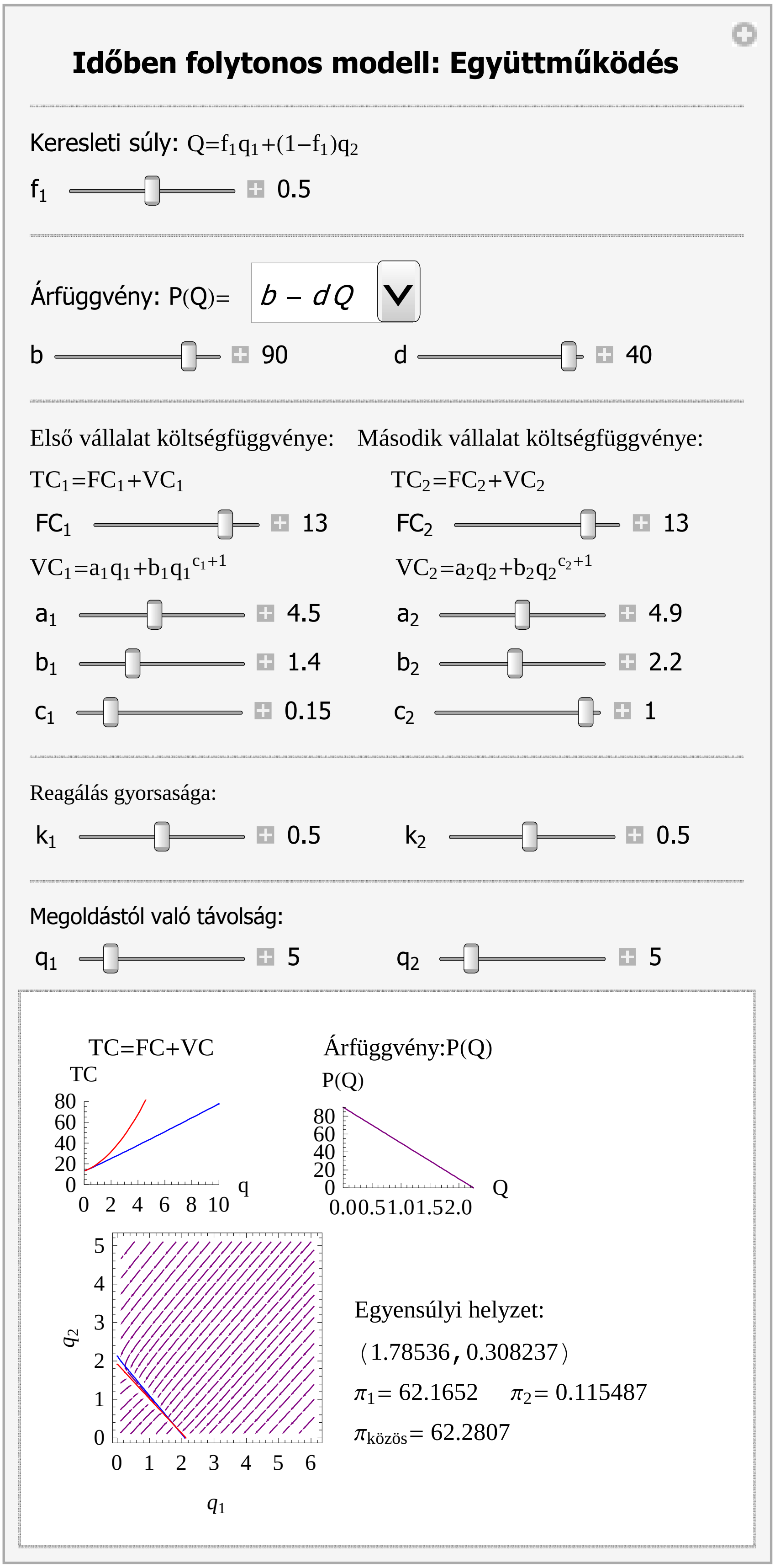
Az egyensúlyi helyzet ebben az esetben instabil.

1. ábra

Interaktív kísérletek

Hasonlóan az eddigiekhez, az időben folytonos együttműködéshez is készült interaktív ábra. A $k_{1,2}$ értékek gyakorlatilag csupán a konvergencia sebességét befolyásolják, a rendszer stabilitására nincsenek hatással.

Vizsgáljuk meg az előző interaktív illusztráció példáit, az időben folytonos modellnek megfelelően, az egyensúlyi helyzet stabilitásának tükrében!


Időben folytonos modell: Együttműködés
Keresleti súly: Q=f1q1+(1−f1)q2
f1 0.5
Árfüggvény: P(Q)= b − dQ
b 90
d 40
Első vállalat költségfüggvénye:
TC1=FC1+VC1
FC1 13
VC1=a1q1+b1q1^(c1+1)
a1 4.5
b1 1.4
c1 0.15
Második vállalat költségfüggvénye:
TC2=FC2+VC2
FC2 13
VC2=a2q2+b2q2^(c2+1)
a2 4.9
b2 2.2
c2 1
Reagálás gyorsasága:
k1 0.5
k2 0.5
Megoldástól való távolság:
q1 5
q2 5
TC=FC+VC
TC
q
Árfüggvény:P(Q)
P(Q)
Q
q2
q1
Egyensúlyi helyzet:
(1.78536, 0.308237)
π1= 62.1652
π2= 0.115487
πközös= 62.2807

Speciális esetek

3. KÍSÉRLET

Vizsgáljuk a modellt az 1. kísérlet beállításaival!

$w = 0.5$,
$P\,(Q) = b - d\,Q$,
$b = 90$, $d = 40$,
$\mathrm{FC}_1 = 13$, $\mathrm{FC}_2 = 13$,
$a_1 = 4.5$, $b_1 = 1.4$, $c_1 = 0.15$,
$a_2 = 4.9$, $b_2 = 2.2$, $c_2 = 1$.

A megoldás stabil. Az időben állandó modellnek megfelelően ez a példa is érzékenyen reagál a paraméterek változtatására. Megfigyelhető, hogy a Cournot-megoldás általában akkor létezik, ha a két vállalat költségei és a keresleti súly közel egyforma.

4. KÍSÉRLET

Vizsgáljuk az alábbi beállítások mellett a modell viselkedését!

$w = 0.5$,
$P(Q) = d\,Q^{-\epsilon}$,
$d = 40$, $\epsilon = 0.5$,
$\mathrm{FC}_1 = 13$, $\mathrm{FC}_2 = 13$,
$a_1 = 5$, $b_1 = 1.5$, $c_1 = 0.2$,
$a_2 = 5$, $b_2 = 1.5$, $c_2 = 0.2$.

Az egyensúlyi helyzet létezik és stabil. A költségek kis mértékű változtatása mellett az egyensúly ebben az esetben is értelmezhető és továbbra is stabilitást mutat.