6. Többfajos modellek

A következő modelleket és egyensúlyi helyzeteinek tulajdonságait R. Durrett, S. A. Levin [4], [5] és C. Neuhauser [6], [14] vizsgálta részletesebben az 1990-es években.

6.1. Levins-modell *n* fajra

A szimmetrikus peemptív versengés n faj esetén a következőképpen modellezhető: mindegyik faj kolonizációjának sebessége arányos az általa elfoglalt és az üres foltok arányának szorzatával, a halálozás a faj belső jellemzője, ezért csak az adott faj elfoglalt foltok arányával arányos. Legyen $p_i(t)$ az i-edik ($0 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \leq 1$) faj által elfoglalt terület aránya a t időpillanatban. A modellt az alábbi egyenletrendszer írja le:

$$p_i'(t) = k_i\, p_i(t)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\right) - e_i\, p_i(t)\,, \quad i = 1, 2 \ldots, n\,,$$

ahol k_i ($0 \leq k_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális kolonizációs ráták, e_i ($0 \leq e_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális halálozási ráták.

Az eredményeket összevetve láthatjuk, hogy egyensúlyi helyzetben együttélés nem alakul ki, vagyis legfeljebb egy faj képes életben maradni. Az i-edik faj életben marad, ha $\frac{e_i}{k_i} < 1$ és $\frac{e_i}{k_i} < \frac{e_j}{k_j}$, $i \neq j$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Az i-edik faj életre képes, ha $e_i < k_i$, vagyis nagyobb arányban kolonizál, mint ahogy kihal. n faj esetén az a faj fog győzni, amelyiknek a legnagyobb az $\frac{e_i}{k_i}$, $i = 1, 2,\ \ldots, n$ hányadosa.

6.2. Hierarchikus felülkolonizációs modell *n* fajra

Feltéve, hogy a fajokat a dominancia szerint sorba rendeztük úgy, hogy a $p_1(t)$-vel jelölt faj a legdominánsabb, $p_n(t)$ a leggyengébb, a differenciálegyenlet rendszer a következőképpen írható fel: egy faj kolonizációjának sebessége arányos az általa elfoglalt és azon foltok arányának szorzatával, amelyet képes kolonizálni. A halálozás a faj belső jellemzője, ezért csak az adott faj által elfoglalt foltok arányával arányos. Legyen $p_i(t)$ az i-edik ($0 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \leq 1$) faj által elfoglalt terület aránya a t időpillanatban. A modellt az alábbi egyenletrendszer írja le:

$$p_i'(t) = k_i\, p_i(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{i} p_j(t)\right) - p_i(t) \sum_{j=1}^{i-1} k_j\, p_j(t) - e_i\, p_i(t),\ \ i = 1,\ 2 \ldots,\ n\,,$$

ahol k_i ($0 \leq k_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális kolonizációs ráták, e_i ($0 \leq e_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális halálozási ráták.

6.3. Szimmetrikus felülkolonizációs modell *n* fajra

Ebben az esetben a differenciálegyenlet rendszer n fajra a következőképpen írható fel: egy faj kolonizációjának sebessége arányos az elfoglalt és az el nem foglalt területek arányának szorzatával, a felülkolonizáció sebessége arányos az adott faj által elfoglalt és egy másik faj által elfoglalt terület arányának szorzatával, a halálozás a faj belső jellemzője, ezért csak az adott faj által elfoglalt foltok arányával arányos. Legyen $p_i(t)$ az i-edik ($0 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \leq 1$) faj által elfoglalt terület aránya a t időpillanatban. A modellt az alábbi egyenletrendszer írja le:

$$p_i'(t) = k_i\, p_i(t)\left(1 - \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\right) + \sum_{j \neq i} c_i\, p_i(t)\, p_j(t) - \sum_{j \neq i} c_j\, p_i(t)\, p_j(t) - e_i\, p_i(t),\ i = 1,\ 2\ \ldots,\ n$$

ahol k_i ($0 \leq k_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális kolonizációs ráták, e_i ($0 \leq e_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális halálozási ráták, c_i ($0 \leq c_i,\ i = 1,\ \ldots, n$) konstansok a globális felülkolonizációs ráták.