M6. Melléklet

Periodikus rendszerek elméletének alapjai

A következő rövid elméleti összefoglaló [2], [9] és [13] alapján készült.

Homogén, lineáris, periodikus rendszerek

A homogén, lineáris, periodikus rendszerek általános alakja:

$$x' = P(t)\,x. \tag{1}$$

Feltesszük, hogy a $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix az idő periodikus függvénye T periódussal, azaz:

$$P(t+T) = P(t).$$

A (6.1) általános megoldása a következő alakú:

$$x(t) = X(t) \cdot C, \tag{2}$$

ahol $X(t)$ a (6.1) alapmátrixa, $X(0) = I$, ahol I az egységmátrix, C oszlopvektor.

A Floquet elmélet értelmében ehhez az alapmátrixhoz létezik egy folytonosan differenciálható, T periodikus S mátrixfüggvény és létezik R állandó mátrix úgy, hogy:

$$X(t) = S(t)\,e^{Rt}.$$

Tudjuk, hogy $X(t+T)$ is alapmátrix, amely ezért előáll $X(t)$ alapmátrix és egy nem elfajuló A valós mátrix szorzataként:

$$X(t+T) = X(t)\,A, \tag{3}$$

A $t = 0$ esetén $X(T) = X(0)\,A = I\,A = A$. Az $A = X(T)$ mátrixot a rendszer monodrómia mátrixának nevezzük.
Keressünk olyan $x(t)$ megoldást, amely előáll a következő alakban:

$$x(t+T) = \lambda\, x(t), \tag{4}$$

ahol λ valamilyen konstans. Ha az $x(t)$ megoldás T-periodikus, akkor $\lambda = 1$. A (6.2) és (6.4) alapján:

$$x(T) = X(T) \cdot C = \lambda\, X(0)\, C.$$

Innen

$$A\,C = \lambda\, C, \text{ átrendezve pedig } (A - \lambda\, I)\,C = 0.$$

A nemtriviális megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy

$\det(A - \lambda I)$ eltűnő, azaz λ az A mátrix sajátértéke legyen. A $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ sajátértékek vizsgálatával az alábbiakat fogalmazhatjuk meg [2]:

1. TÉTEL

Ha karakterisztikus egyenlet minden gyökének abszolút értéke egynél kisebb, akkor a perturbálatlan $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *mozgás aszimptotikusan stabil.*

Ha a karakterisztikus egyenlet csupán egyetlen gyökének is nagyobb az abszolút értéke egynél, akkor az $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *mozgás instabil.*

Ha a karakterisztikus egyenletnek az $|\lambda_i| = 1$ *tulajdonságú sajátértékeinek multiplicitása egy, míg a többi gyöké egynél kisebb, akkor az* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *mozgás stabil, de nem aszimpotikusan. Ha a multiplicitás egynél nagyobb, akkor az* $x_1 = \ldots = x_n = 0$ *megoldás instabil.*

▱ Inhomogén, lineáris, periodikus rendszerek

Az inhomogén, lineáris, periodikus rendszerek általános alakja:

$$x' = P(t)\,x + b(t), \tag{5}$$

ahol $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix és $b(t)$ az idő periodikus függvényei, T periódussal.

Az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának (6.2), és az inhomogén egy $x_{\mathrm{ihp}}(t)$ partikuláris megoldásának összege :

$$x(t) = X(t)\cdot C + x_{\mathrm{ihp}}(t).$$

ahol $x_{\mathrm{ihp}}(0) = 0$. Ha $x(t)$ periodikus megoldás, felhasználva (6.4)-et, (6.2)-őt, majd (6.3)-at:

$$x(T) = X(T)\,C + x_{\mathrm{ihp}}(T) = A\,C + x_{\mathrm{ihp}}(T) = x(0) = X(0)\cdot C + x_{\mathrm{ihp}}(0) = I\,C,$$

ahonnan a következőt kapjuk:

$$-x_{\mathrm{ihp}}(T) = A\,C - I\,C,$$

azaz,

$$-x_{\mathrm{ihp}}(T) = (A - I)\,C.$$

Tehát a nemtriviális periodikus megoldás létezésének feltételét a következő tételben fogalmazzuk meg:

2. TÉTEL

A (6.6) rendszernek akkor és csakis akkor van pontosan egy nemtriviális periodikus megoldása, ha $\det(A - I) \neq 0$ *, azaz a homogén egyenletnek nincs* *nemtriviális periodikus megoldása.*

Érdekes még az alábbi állítás is:

3. TÉTEL

A (6.6) rendszernek akkor és csakis akkor van periodikus megoldása, ha van korlátos megoldása. Innen adódik, hogy ha a rendszernek nincs periodikus megoldása, akkor minden megoldás nem-korlátos [9].

◻ Nemlineáris periodikus rendszerek

Tekintsük az általánosabb alakú egyenletet:

$$x' = P(t)\,x + F(t,\,x), \tag{6}$$

ahol $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, és $F(t,\,x)$ az idő periodikus függvényei, T periódussal. Igaz a következő tétel ([13] 413. oldal, 2.1. Tétel következménye):

4. TÉTEL

Tegyük fel hogy az $x' = P(t)\,x$ egyenletnek nincs nemtriviális T-periodikus megoldása.

Ha teljesül az

$$\|F(t,\,x_1) - F(t,\,x_2)\| \le \varphi(\|x_1 - x_2\|)\,\|x_1 - x_2\|,$$

feltétel $\|x_1\| < r$, és $\|x_2\| < r$ esetén, ahol $\lim_{u\to 0}\varphi(u) = 0$, akkor a (6.7) rendszernek létezik pontosan egy olyan T-periodikus $x(t)$ megoldása, amelyre $\|x(t)\| \le r$.

Megjegyezzük, hogy a tétel az $F(t,\,x) = g(t) + f(t,\,x)$ alakú perturbációkra is alkalmazható. Ilyen az inhomogén nemlineáris matematikai inga egyenlete is.