5. Ingamozgás periodikus hosszváltozás hatására

Ebben a fejezetben a gyerek a hintát a rajta történő periodikusan ismétlődő felegyenesedésekkel illetve leguggolásokkal hozza mozgásba. Ekkor a rendszer tömegközéppontjának felfüggesztéstől való távolsága periodikusan változik. Ezért a hinta egy periodikusan változó hosszúságú ingának felel meg [1, 10, 12].

A mozgás részletes vizsgálata nehéz probléma, túlmutat a dolgozat keretein. Ezért csupán egyszerű esetek elemi és kísérleti vizsgálatára szorítkozunk.

5.1. A mozgás egyenlete

Legyen egy m tömegű test egy l hosszúságú, elhanyagolható tömegű fonalra függesztve. Az x a szögelfordulás, a a fékezési együttható, m a tömeg, g a nehézségi gyorsulás. Az inga egyenlete

$$\left(m\, l^2(t)\, x'\right)' + a\, l^2\, x'(t) + m\, g\, l(t) \sin x = 0 \tag{1}$$

alakú [1, 12], a linearizált egyenlet pedig

$$\left(m\, l^2(t)\, x'\right)' + a\, l^2\, x'(t) + m\, g\, l(t)\, x = 0 \tag{2}$$

Ha az $l(t)$ függvény deriválható, akkor az (5.1) egyenlet alakja

$$x'' + \left(2\, \frac{l'}{l} + \frac{a}{m}\right) x' + \frac{g}{l} \sin x = 0.$$

Az (5.1) egyenlet által leírt mozgás energiafüggvénye [7] alapján

$$\frac{l(t)\, x'^2}{2} + g\, (1 - \cos(x))$$

alakú, aminek az egyenlet szerinti deriváltja ($y = x'$):

```
fizinga := {1, y, -g / l[t] Sin[x] - (a + 2 l'[t] / l[t] ) y};
Vfiz = y^2 l[t] / 2 + g (1 - Cos[x]);
```

```
Simplify[∂{{t,x,y}} Vfiz.fizinga]
```

$$-\frac{1}{2}\, y^2\, (2\, a\, l[t] + 3\, l'[t])$$

Innen jól látható, hogy ha $l(t)$ növekszik, az erősíti a fékező hatást (az energia csökken). Ugyanakkor, ha $l(t)$ csökken, akkor az a fékezőhatást kompenzálja. Elegendően gyors csökkenés és kellően kicsi fékezési együttható esetén az energia növekedhet. Tényleges energianövekedés akkor következik be, ha a sebesség is kellően nagy, míg az energiacsökkenés elenyésző, ha az $l(t)$ növekedése kicsi sebesség esetén következik be. Ezért a hintázáskor az alsó egyensúlyi helyzet közelében (nagy sebesség) kell a hintázónak felállni (inga hossza csökken), míg kis sebességnél (szélső helyzetben) leguggolni.

5.2. A mozgás vizsgálata

A fenti észrevételeknek megfelelően vizsgáljuk a mozgást kísérletekkel. Az alábbi demonstráció háromféle ingahossz-változást tartalmaz, ahol a hossz T periódussal a h_0 érték körül ϵ amplitúdóval változik:

Az első esetben egy lépcsős függvénnyel definiáltuk a hosszváltozást:

$$l(t) = h_0 + \epsilon\, \mathrm{sign}\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{T}\,(t-\tau)\Big)\Big),$$

a második változat szerint:

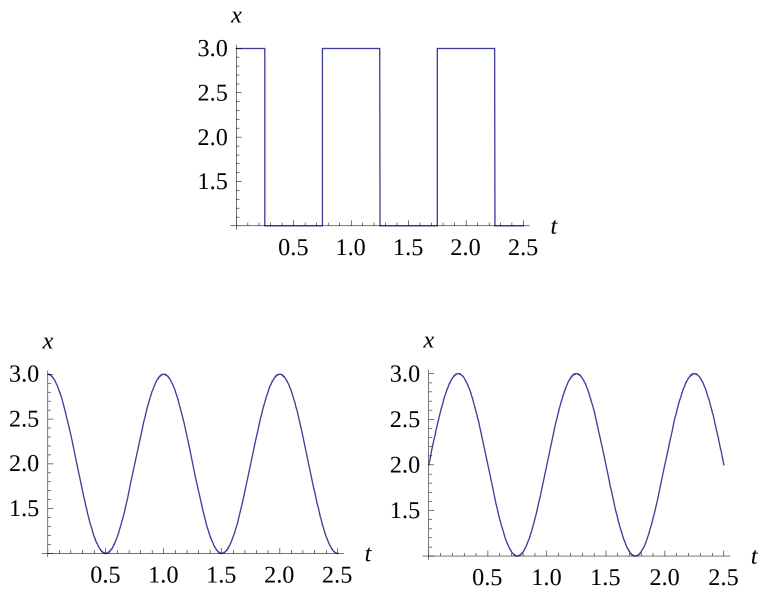
$$l(t) = h_0 + \epsilon \cos\Big(\frac{2\pi}{T}\,(t-\tau)\Big),$$

a harmadik esetben pedig:

$$l(t) = h_0 + \epsilon \sin\Big(\frac{2\pi}{T}\,(t-\tau)\Big).$$

A lépcsős, a koszinuszos és a szinuszos hosszfüggvény ek alakja

$(h_0 = 2,\ \epsilon = 1,\ T = 1,\ \tau = 0)$



1. ábra

Mivel az első esetben $l(t)$ nem folytonos, ezért az (5.1) egyenletet az alábbi rendszerré alakítjuk át:

$$x' = \frac{y}{l(t)^2},$$
$$y' = -g\, l(t) \sin(x) - \frac{a}{m}\, y, \tag{3}$$

ahol a megoldásokban $x(t)$ és $y(t)$ szakaszonként folytonosan deriválható, és $x'(t)$ nem folytonos.

Az alábbi interaktív illusztráción párhuzamosan tekintjük a lineáris és nemlineáris matematikai inga-modelleket. Az ábrákon az $l(t)$ függvényt piros színnel rajzoltuk meg.

Interaktív illusztráció

A mozgás vizsgálata során a következő érdekes észrevételeket, sejtéseket fogalmazhatjuk meg:

Rezonancia jön létre, ha a felegyenesedések és leguggolások periódusideje fele a mozgás periódusidejének [1, 12].

A fékezés nélküli esetben mindkét modellben létezik el nem haló, korlátos mozgás, ha nincs rezonancia.

Fékezés mellett a nemlineáris matematikai inga mozgásban tartható (korlátos, nullához nem tartó mozgás) megfelelő hosszváltozás periódus és fázis esetén. A lineáris matematikai inga esetén stabilitást nem tapasztaltunk. A mozgás vagy kihal, vagy nem korlátos (szinguláris eset lehetséges)

Ezek alapján a következő beállításokat javasoljuk a lépcsős ingahossz változás mellett:

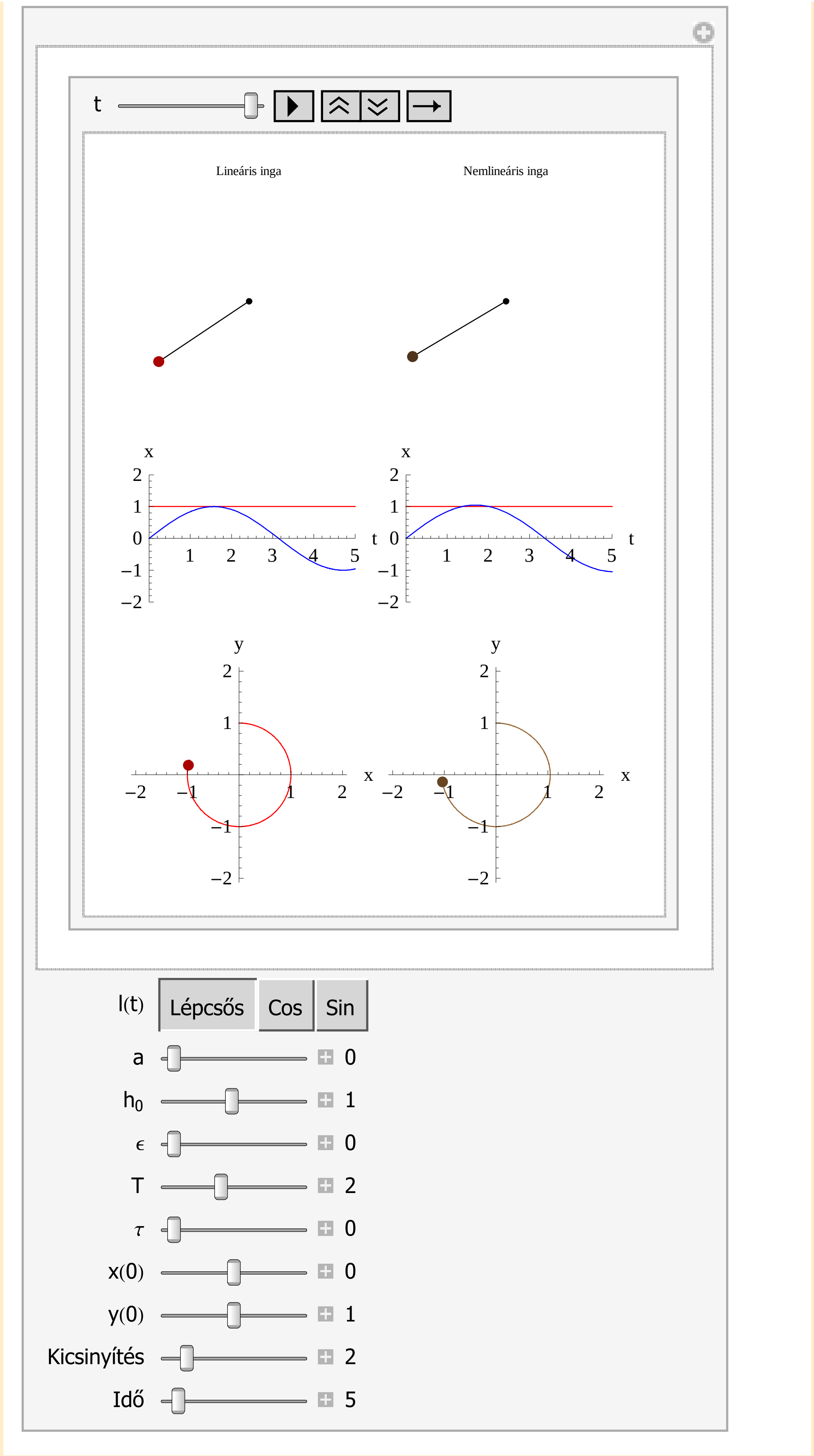
$a = 0$, $h_0 = 1$, $\epsilon = 0.2$, $T = \pi$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ - rezonancia

$a = 0$, $h_0 = 1$, $\epsilon = 0.2$, $T = 2$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ - hintázás

$a = 0.1$, $h_0 = 1$, $\epsilon = 0.2$, $T = 2$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ - elhaló mozgás.

$a = 0.1$, $h_0 = 1$, $\epsilon = 0.2$, $T = 3$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ - mat. inga nem korlátos, fiz. inga korlátos és nem elhaló.

A fenti beállításokat alapul véve változtassuk a hosszfüggvényt és a paramétereket (különösen T, τ, h_0, ϵ). Figyeljük meg a változásokat. Hasonlítsuk össze a két modell viselkedését.


t
Lineáris inga
Nemlineáris inga
x
t
y
x
l(t)
Lépcsős
Cos
Sin
a 0
h0 1
ϵ 0
T 2
τ 0
x(0) 0
y(0) 1
Kicsinyítés 2
Idő 5