

3. Fékezett ingamozgás

A valóságban mindig jelen van valamilyen csillapítás. A gázban vagy folyadékban való mozgásnál, kis sebesség esetén a csillapítás arányos a sebességgel. Ha az

$$x'' + k^2 \sin x = 0,$$

vagy az

$$x'' + k^2 x = 0$$

egyenlethez hozzávesszük a csillapítást, akkor az inga mozgása lassul, a rezgések amplitúdója csökken. Ez az amplitúdócsökkenés az energiaveszteségek miatt következik be.

3.1. A fékezett lineáris matematikai inga

A fékezett lineáris matematikai inga mozgását a következő differenciálegyenlet írja le:

$$x'' + a x' + k^2 x = 0$$

ami rendszer alakban:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -a y - k^2 x, \end{aligned} \tag{1}$$

```
Clear[a, k];  
csillapmatinga := {y, -a y - k^2 x};
```

ahol $a > 0$ a csillapítási tényező és k^2 a rugalmassági együttható.

A rendszer teljes energiáját most is a:

$$V_{\text{mat}}[\{x_, y_-\}] = \frac{y^2}{2} + \frac{k^2 x^2}{2};$$

függvény írja le.

Legyen $x(t)$ a rendszer tetszőleges megoldása. Mivel

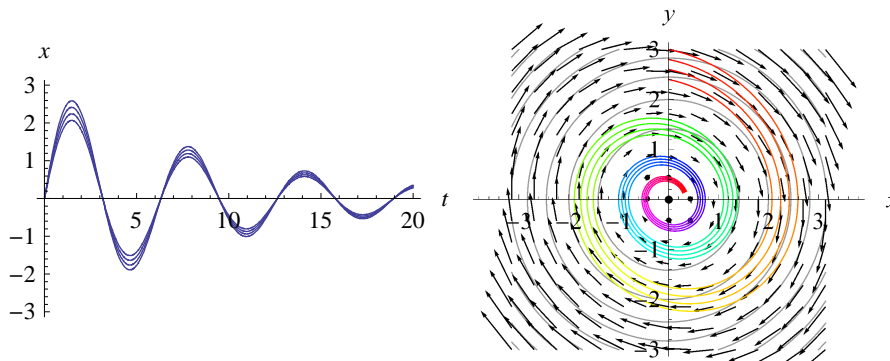
```
Factor[D[{{x,y}} Vmat[{x,y}].csillapmatinga]  
-a y^2
```

azaz az energia rendszer szerinti deriváltja [9] nempozitív, a $V_{\text{mat}}(x(t), y(t))$ függvény nemnövvő, ami valamilyen stabilitást jelent. Ekkor a trajektóriák az

energia szintvonalait kívülről befelé metszik. Megjegyezzük, hogy a csökkenés mértéke nulla, ha $y = 0$. A Ljapunov elmélettel belátható, hogy az $x(t) = 0$ megoldás aszimptotikusan stabilis [14], de mivel a rendszer lineáris, ezt egyszerűbben is beláthatjuk (lásd alább).

Illusztrációként legyen $a = 0.2$, $k = 1$; $x(0) = 0$ és $y(0) = 2.4, 2.6, 2.8, 3$ kezdeti értékek esetén a megoldásokat a következő ábra mutatja.

A kitérés az idő függvényében, az energiaszintek, a vektormező és a trajektóriák :



1. ábra

Az egyenlet egyensúlyi helyzete (origó)

```
eh = Solve[csillapmatinga == {0, 0}, {x, y}]
{{x -> 0., y -> 0.}}
```

aszimptotikus stabilitását a karakterisztikus gyökök segítségével vizsgálhatjuk. A (3.1) rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + a\lambda + k^2 = 0,$$

melynek gyökei:

```
Clear[a, k];
Chareq = Solve[\lambda^2 + a \lambda + k^2 == 0, \lambda]
{{{\lambda -> \frac{1}{2} (-a - \sqrt{a^2 - 4 k^2})}}, {{\lambda -> \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 - 4 k^2})}}}
```

valóságosak, ha $|a/k| \geq 2$. A gyökök komplexek az ellenkező esetben, és tisztán képzetesek, ha $a = 0$. Az $a > 0$ a sajátértékek negatív valós részűek, tehát az egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil, és a megoldások exponenciális sebességgel tartanak nullához.

Ha $a/k \geq 2$, akkor a megoldások általános alakja:

```
thdampsold1[t_] = Expand[
```

$$\text{DSolve}\left[\{x''[t] + a x'[t] + k^2 x[t] == 0\}, x[t], t], \frac{a}{k} \geq 2\right]$$

$$\left\{\left\{x[t] \rightarrow e^{\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4k^2})t} C[1] + e^{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4k^2})t} C[2]\right\}\right\}$$

Ha $a/k = 2$:

$$\text{thdampsold2}[t_]=$$

$$\text{Expand}\left[\text{DSolve}\left[\left\{x''[t] + a x'[t] + \frac{1}{4} a^2 x[t] == 0\right\}, x[t], t\right]\right]$$

$$\left\{\left\{x[t] \rightarrow e^{-\frac{at}{2}} C[1] + e^{-\frac{at}{2}} t C[2]\right\}\right\}$$

Ha $a/k < 2$, és $\mu = \sqrt{a^2 - 4k^2}$ jelölést alkalmazva:

$$\text{thdampsold3}[t_]=$$

$$\text{Simplify}\left[\text{DSolve}\left[\left\{x''[t] + a x'[t] + k^2 x[t] == 0\right\}, x[t], t\right] /. \right.$$

$$\left. \sqrt{a^2 - 4k^2} \rightarrow i \mu /. e^u \rightarrow \text{ComplexExpand}[e^u] \right]$$

$$\left\{\left\{x[t] \rightarrow e^{-\frac{at}{2}} \left((C[1] + C[2]) \cos\left[\frac{t\mu}{2}\right] - i (C[1] - C[2]) \sin\left[\frac{t\mu}{2}\right] \right)\right\}\right\}$$

A megoldás ebben az esetben oszcillál $T = 4\pi/\mu$ lengésideővel.

3.2. A fékezett nemlineáris matematikai inga

A fékezett nemlineáris matematikai inga mozgása a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$x'' + a x' + k^2 \sin x = 0$$

melynek rendszer alakja:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -a y - k^2 \sin x, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{csillapfizinga} = \{y, -a y - k^2 \sin[x]\};$$

ahol $a > 0$.

A rendszer $V_{\text{fiz}}(x, y)$ energia függvénye, és annak deriváltja:

$$\text{vfiz}[\{x_, y_-\}] = \frac{y^2}{2} + \int_0^x k^2 \sin[u] du;$$

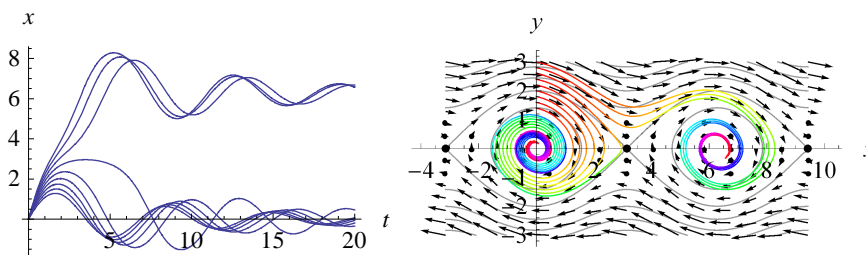
Factor [$\partial_{\{x,y\}}$ **Vfiz** [$\{x, y\}$].csillapfizinga]

$$-a y^2$$

Az energia szintén nem nő a megoldások mentén, a csökkenés mértéke nulla, ha $y = 0$.

Tekintsük a következő ábrát, ahol $a = 0.2$, $k = 1$, $x = 0$, $y = 1.4, 1.6, 1.8, \dots, 3$ közöttiek.

A kitérés az idő függvényében, az energiaszintek, a vektormező és a trajektóriák :



2. ábra

Látható, hogy kis kezdeti értékek esetén a megoldások az alsó egyensúlyi helyzet körül mozognak, és ahhoz tartanak. Nagy kezdeti sebesség mellett a megoldások elérik a felső egyensúlyi helyzetet, sőt az inga át is fordul azon, de a csillapítás miatt véges átfordulás után lengeni kezd, és lefékeződik. Megmutatható, hogy csak véges számú átfordulás lehetséges.

Ugyanis, tegyük fel, hogy az inga a t_1 pillanatban $y(t_1) = y_1$ sebességgel fordul át a felső egyensúlyi helyzeten. Ekkor $V_{\text{fiz}}(x(t_1), y(t_1)) = 2k^2 + \frac{y_1^2}{2}$. Tegyük fel, hogy az inga ezután még egyszer feljut ide a $t_2 > t_1$ pillanatban. Emiatt, a kettő közötti, $t_1 + T$ pillanatban beközetkező alsó egyensúlyi helyzetig $y(t)$ monoton növekvő, és $|y(t)| > \min(|y_1|, k)$. Ezért a $[t_1, t_1 + T]$ szakaszon

$$V'(x(t), y(t)) = -a y^2(t) < -a y_1^2, \text{ és}$$

$$V(x(t_1 + T), y(t_1 + T)) < V(x(t_1), y(t_1)) - a y_1^2 T = 2k^2 + y_1^2 \left(\frac{1}{2} - a T \right).$$

Mivel $y(t_1) \rightarrow 0$ esetén $T \rightarrow \infty$, ezért elegendően kicsi $y(t_1)$ esetén a jobboldali második tag negatív, azaz az energia a kritikus $2k^2$ érték alá csökken. Hasonló érveléssel az is megmutatható, hogy az $y(t_1)$ sebesség nem maradhat pozitív konstans felett.

A (3.2) egyenlet egyensúlyi helyzeteinek stabilitását a linearizálás módszerével vizsgáljuk. A módszer lényegét a következő néhány sorban ismertetjük [14] alapján. Adott egy

$$x' = f(x), \tag{3}$$

alakú egyenlet, ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, $x_0 \in D$, $f(x_0) = 0$. Az egyenlet jobb oldalát Taylor-sorba fejtve x_0 körül kapjuk, hogy:

$$x' = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

A magasabb rendű tagok elhagyásával kapjuk, hogy:

$$x' = f'(x_0)(x - x_0).$$

Az $A = f'(x_0)$, és $y = x - x_0$ jelöléseket alkalmazva:

$$y' = A y$$

egyenletet kapjuk, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mely (3.3) linearizált egyenlete.

1. TÉTEL

Az egyenlet alsó egyensúlyi helyzetei ($x=0, \pm 2\pi, \dots, y=0$) aszimptotikusan stabilak, a felső egyensúlyi helyzetek ($x=\pi, \pm 3\pi, \dots, y=0$) pedig instabilak.

BIZONYÍTÁS

Vizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását az első közelítés módszerével! Az egyenletrendszer jobb oldalának deriváltja:

```
Clear[a, k];
var = {x, y};
csillapfizinga := {y, -a y - k^2 Sin[x]};
M = MatrixForm[D[csillapfizinga, {{x, y}}]];
```

Az alsó egyensúlyi helyzet körüli linearizálással kapott egyenletrendszer, aminek mátrixa

M / . x → 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -a \end{pmatrix}$$

éppen a csillapított matematikai inga egyenlete, amiről már beláttuk, hogy az egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis.

Most nézzük a felső egyensúlyi helyzetet! Ebben az esetben a mátrix a következő alakú:

M / . x → π

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

A mátrix sajátértékei:

Eigenvalues [D[csillapfizinga, {{x, y}}]] /. {x -> pi, y -> 0}

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(-a - \sqrt{4 + a^2} \right), \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{4 + a^2} \right) \right\}$$

Mindkét gyök valós, egyik negatív, másik pedig pozitív, tehát a felső egyensúlyi helyzet instabil.

■

Interaktív illusztráció

A következő interaktív ábrán keresztül összehasonlítom a fékezett lineáris matematikai, illetve nemlineáris matematikai inga mozgását. Láttuk, hogy a mozgást a csillapítás nagymértékben befolyásolja. Érdekes az alábbi eseteket megfigyelni:

Kicsi kezdeti értékek esetén ha $V(x(0), y(0)) \ll 2k^2$ a két inga sokáig együtt leng.

Ha a kezdeti kitérést 0-nak választjuk (a csillapítás pl. legyen 0.1, a rugalmassági együttható pedig 1), a kezdeti sebességet pedig interaktívan változtatjuk, akkor láthatjuk, hogy elegendően nagy kezősebesség esetén a nemlineáris matematikai inga képes akár többszöri átfordulásra is felső egyensúlyi helyzetén. Ha a kezdeti energia elegendően közel van a kritikus $2k^2$ értékhez, akkor a fizika inga már nem képes átfordulni.

□ Javasolt beállítások:

$a = 0.1, k = 1, x(0) = 0, y(0) = 2.21$. Ebben az esetben a nemlineáris matematikai inga energiája még éppen elegendő az egyszeri átforduláshoz.

