2. A fékezetlen inga mozgása

2.1. Bevezetés

Jelölje x a függőlegestől való eltérés szögét, l az inga hosszát, g a gravitációs gyorsulást, m pedig felfüggesztett test tömegét. Az inga egyenletét a Lagrange függvény segítségével írhatjuk le, melyet úgy kapunk, hogy a rendszer mozgási energiájából kivonjuk a helyzeti energiáját. A mozgási, illetve a helyzeti energia:

$$T = \frac{1}{2} m(l\,x')^2$$
$$U = -l\,m\,g\cos x.$$

Írjuk fel a Lagrange-függvényt [4].

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(l\,x')^2 + l\,m\,g\cos x$$

A mozgás Lagrange-féle egyenletét a következők alapján kaphatjuk meg:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Ebbe behelyettesítve az ingára kapott Lagrange függvényt a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{d}{dt}\left(m\,l^2\,x'\right) = -l\,m\,g\sin x$$

Egyszerűsítéssel és további átrendezéssel nyerjük:

$$x'' + k^2 \sin x = 0 \tag{1}$$

egyenletet, ahol $k^2 = \frac{g}{l}$ (rugalmassági együttható), ami a nemlineáris matematikai inga mozgását írja le. Kis kitérések esetén az egyenlet linearizálható, a $\sin(x)$ Taylor-sorának első tagja lineáris:

$$\sin(x) = x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Ekkor jutunk a matematikai inga

$$x'' + k^2 x = 0 \tag{2}$$

egyenletéhez. A lineáris rendszerek elméletét felhasználva az egyenlet tulajdonságai jól ismertek. A nemlineáris matematikai inga mozgását kis kitérések esetén a lineáris matematikai inga perturbációjaként tekintjük:

$$x'' + k^2(x + x\,\varphi(x)) = 0, \tag{3}$$

ahol $\varphi(x) = O\left(x^2\right)$ páros függvény, amit az $x\,\varphi(x) = \sin(x) - x$ összefüggés definiál.

Bár a valóságban mindig jelen van a csillapítás, a teljesség kedvéért a csillapítatlan eseteket is felvázolom.

2.2. A lineáris matematikai inga

A (2.2) egyenletet rendszerként felírva kapjuk:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -k^2 x. \end{aligned} \tag{4}$$

A lineáris differenciálegyenletek elméletéből tudjuk, hogy a (2.4) egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + k^2 = 0,$$

melynek gyökei:

```
Clear[k];
```

```
Solve[λ^2 + k^2 == 0, λ]
```

$\{\{\lambda \to -i\, k\}, \{\lambda \to i\, k\}\}$

Mivel a gyökök komplex számok, az általános megoldás az alábbi alakú:

```
eqn = {x'[t] == y[t], y'[t] == -k^2 x[t]};
HaL = Simplify[DSolve[eqn, {x[t], y[t]}, t]][[1, 1]]
```

$x[t] \to C[1]\,\mathrm{Cos}[k\, t] + \dfrac{C[2]\,\mathrm{Sin}[k\, t]}{k}$

A megoldások periodikusak $2\pi/k$ periódussal. Mivel nincs csillapítás, az energia (a helyzeti és a mozgási energia összege) $V = \frac{1}{2}\left(x'^2 + x^2\right)$ állandó a megoldások mentén [8]:

```
matinga := {y, -k^2 x};
Vmat[{x_, y_}] = y^2/2 + k^2 x^2/2;
```

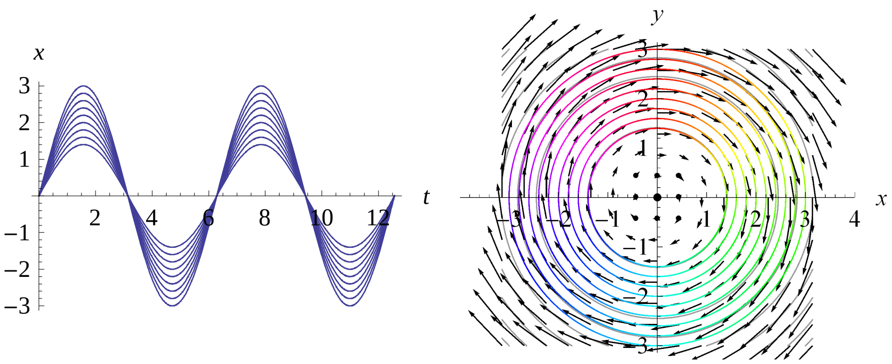
```
∂{{x,y}} Vmat[{x, y}].matinga
```

0

Vizsgáljuk a (2.4) egyenletrendszert! A $k = 1$ választásával a megoldásokat a következő ábra mutatja. A jobb oldali ábra színezése az idővel arányos.

A bal oldali ábra alapján a lengések periódusa nem függ a lengések amplitúdójától.

A kitérés az idő függvényében , illetve a mozgás energiaszintjei,
a vektormező és a trajektóriák :



1. ábra

2.3. A nemlineáris matematikai inga

A nemlineáris inga mozgását a (2.1) egyenlet írja le, melynek egyenletrendszer alakja:

$$x' = y, \qquad y' = -k^2 \sin x. \tag{5}$$

A rendszer energiája:

```
fizinga := {y, -k^2 Sin[x]};
Vfiz[{x_, y_}] = y^2/2 + ∫_0^x k^2 Sin[u] du;
```

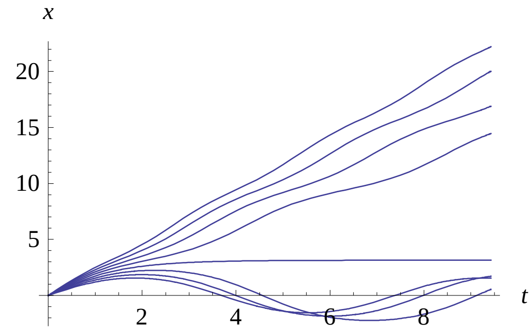
A megoldások mentén a rendszer energiája állandó.

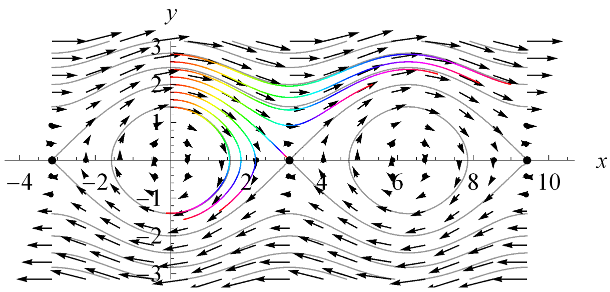
```
∂_{{x,y}} Vfiz[{x, y}].fizinga
0
```

Látható, hogy az inga mozgása erősen függ az amplitúdótól. Kis kezdősebességeknél az alsó egyensúlyi helyzet környezetében a kezdeti értéktől függő periódussal leng. Ha $V_{\text{fiz}}(x(0),\ y(0)) = 2\,k^2$, akkor az inga végtelen idő alatt jut el a felső egyensúlyi helyzetig ("szeparátor trajektória" az ábrán). Ennél nagyobb kezdeti energia esetén az inga körbeforog. Kis amplitúdó esetén a mozgás alig tér el a matematikai inga mozgásától.

A következő ábra $k = 1$, $x = 0$, $y = 1.4,\ 1.6 \ldots 2.8$ közötti értékei esetén mutatja a megoldásokat.

A kitérés az idő függvényében , az energiaszintek, a vektormező és a trajektóriák :





Interaktív illusztráció

A következő interaktív ábra a lineáris és nemlineáris inga mozgásának összehasonlítására szolgál. Az ábra tartalmazza a kritikus $2\,k^2$ energiaszintet is. Érdemes az alábbi eseteket megfigyelni:

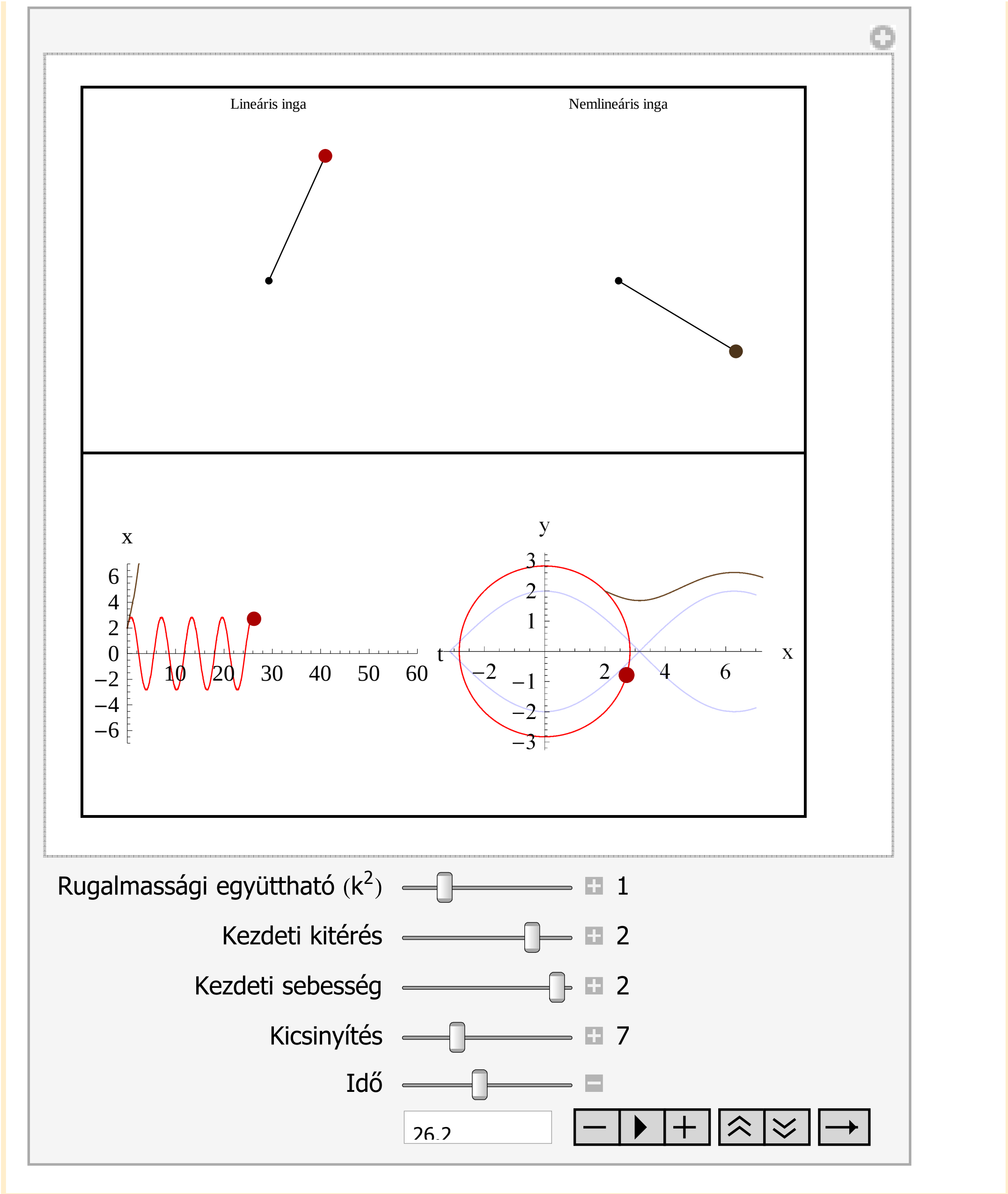
Nagyon kicsi kezdeti értékek: a két inga sokáig együtt leng.

Nagy, $V(x(0),\ y(0)) < 2\,k^2$, de ehhez közeli kezdeti értékek esetén markáns eltérés a két inga viselkedése között.

▫ Javasolt beállítások:

$k = 1$, $x(0) = 0.05$, $y(0) = 0.63$,

$k = 1$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1.9$.



Lineáris inga
Nemlineáris inga
x
6
4
2
0
−2
−4
−6
10
20
30
40
50
60
t
y
3
2
1
−1
−2
−3
−2
2
4
6
x
Rugalmassági együttható (k^2) 1
Kezdeti kitérés 2
Kezdeti sebesség 2
Kicsinyítés 7
Idő
26.2