

Szilassi Lajos:

Szegedi Tudományegyetem
Juhász Gyula Tanárképző Főiskolai Kar
Matematika Tanszék
E-mail: szilassi@jgytf.u-szeged.hu

A kételkedés joga – és kötelessége

(Gondolatok az [Erdély-féle spidron-rendszer](#) vizsgálatára kapcsán)

Amikor e sorok írója először kezébe vette a „spidron-fészek” nevű geometriai konstrukció mozgatható papír-modelljét, az első rácsodálkozást követően a kételkedés vált úrrá gondolataiban. Kételkedés abban, hogy ez, az Erdély Dániel által felfedezett – és elnevezett – konstrukció valóban rendelkezik-e azokkal a geometriai tulajdonságokkal, amelyek a modell mozgatása (deformálása) közben tapasztalhatunk. E kételkedés történetét és eredményét ismerheti meg az olvasó. Anélkül, hogy a spidron-rendszer minden, matematikai szempontból érdeklődésre számot tartó tulajdonságát feltárnánk, elemezni fogjuk, hogy a spidron-fészek milyen mozgásra „képes”. Megmutatjuk, hogy a modell alapján erős sejtésnek tekinthető mozgás valóban tulajdonsága a matematikai eszközökkel pontosan leírt „absztrakt” spidron-fészeknek. Vizsgálatainkhoz a Maple számítógép-algebrai rendszert fogjuk felhasználni, amely amellet, hogy formális matematikai eszközökkel pontos (tehát nem közelítő numerikus) eredményeket szolgáltat, igen jó közelítő számításokra is alkalmas, miközben a megjelenítés és a szemléltetés terén is kiváló eszköznek bizonyul. Mielőtt mindezt megtennénk, néhány példán keresztül megmutatjuk, hogy miért kell óvatosnak lennie egy matematikusnak, különösen egy teljesen új konstrukció megismerésekor.

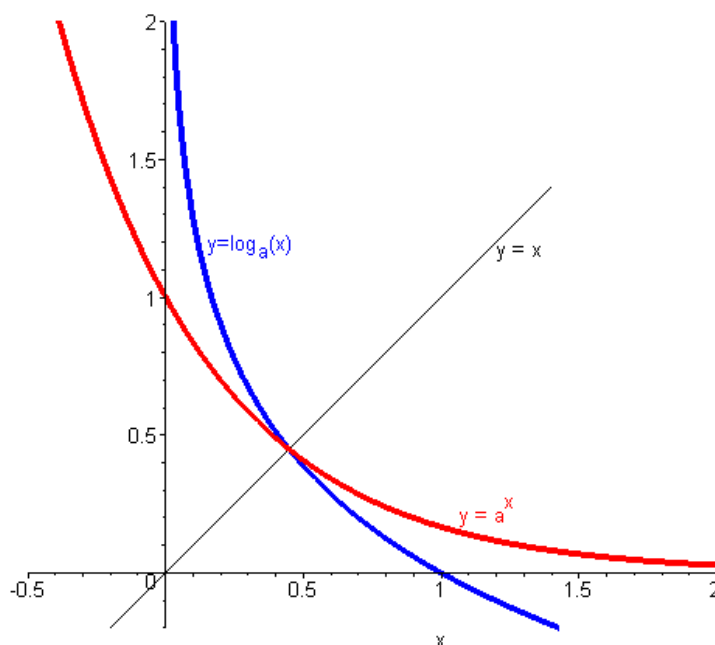
Kezdjük egy (látszólag) nem ide tartozó feladattal:

Hány (valós) megoldása van az $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}}(x)$ egyenletnek? A válasz első pillantásra nem tűnik nehéznek.

Az $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ és az $y = \log_{\frac{1}{16}}(x)$

függvények egymás inverzei, ezért grafikonjaik egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan.

Ennek megfelelően az $y = x$ egyenesen metszik egymást, és csak ott, mivel mindkét görbe monoton. Tehát az egyenletnek **csak egy** – transzcendens – megoldása van, melyet csak közelítő módszerekkel tudunk meghatározni.

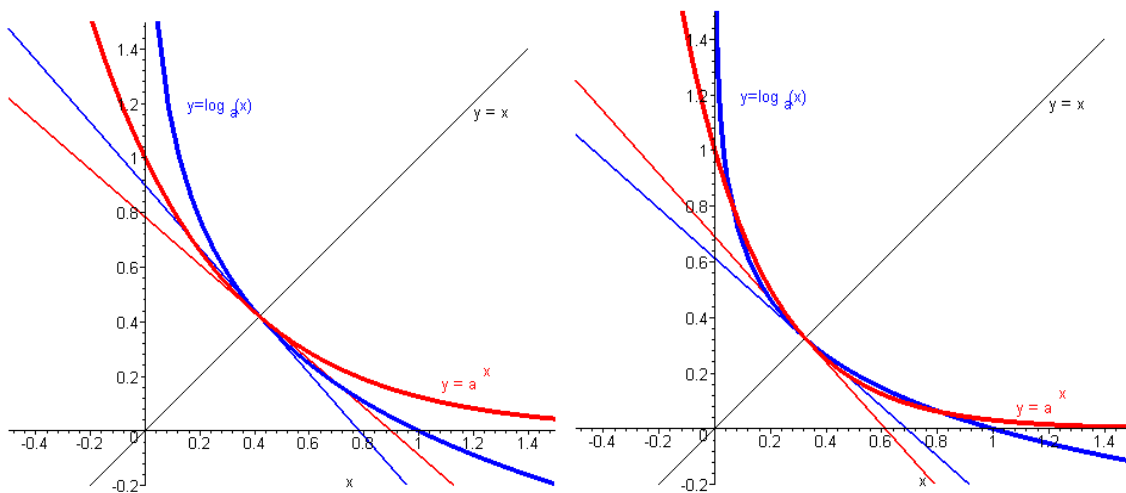


Az eredeti egyenlet megoldása helyett elegendő az $x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ egyenlet egyetlen gyökét megkeresnünk, amelyre a Maple felhasználásával az $x \approx 0.3642498896\dots$ (közelítő) értéket kaptuk.

Azok az olvasóink, akik helyénvalónak vélik a fenti okfejtést, próbálják ki, hogy az $x = \frac{1}{2}$ valamint az $x = \frac{1}{4}$ ugyancsak gyöke az egyenletnek. Hol a hiba¹?

A „megoldás”-nak az a része, amely arra vonatkozik, hogy az egyenlet két oldalának megfelelő függvény egymás inverze, helytálló, így a két függvénynek valóban van metszéspontja az $y=x$ egyenesen. Abból viszont, hogy mindkét görbe monoton, nem következik, hogy másutt nem metszhetik egymást. Ennek illusztrálására mutatunk egy „durvább” példát.

Ábrázoljuk az $y = a^x$ függvényt és inverzét, az $y = \log_a x$ függvényt közös koordináta-rendszerben az $y=x$ egyenesre eső $(x_0; x_0)$ metszéspontjukba húzott érintőkkel együtt. A baloldali ábrán $a = \frac{1}{8}$, a jobboldalin $a = \frac{1}{32}$



Észrevehetjük, hogy $a = \frac{1}{8}$ esetben az exponenciális függvény érintőjének az irányszöge abszolút értékben kisebb, mint 45° , így az inverzéé nagyobb. Ez azt jelenti, hogy például az $x < x_0$ értékekre a logaritmus függvény érintője fölötté halad az exponenciális függvény érintőjének, maga a logaritmusfüggvény pedig még e fölött. Így ezen az intervallumon nem metszheti az exponenciális függvényt.

¹ Ez az igen érdekes kérdés SHARAGIN japán matematikustól származik, aki ehhez hasonló szép feladatokkal intette nagyobb óvatosságra olvasóit. [3]

Ugyanakkor $a = \frac{1}{32}$ esetben, – mivel a logaritmusfüggvény érintőjének az irányszöge lesz kisebb abszolút értékben 45° -nál – ha $x < x_0$ akkor az az x_0 pont közelében a logaritmusfüggvény alatta halad az exponenciális függvénynek. Ugyanakkor metszenie kell valahol, mivel az exponenciális függvény metszi az y tengelyt, a logaritmus-függvény pedig nem. Ennek a metszéspontnak az $y=x$ egyenesre vonatkozó tükörképe ugyancsak metszéspont lesz. Eszerint, ha a $0 < a < 1$ paraméter elég közel van 0-hoz, akkor biztosan három, ha elég közel van 1-hez, biztosan egy gyöke van az $a^x = \log_a x$ egyenletnek. Így hát nem volt igazunk abban, hogy egy monoton függvény és inverze csak az $y=x$ egyenesen metszheti egymást.

Keressük meg azt az a paraméter értéket, amely e két állapot közötti határeset! Ez nyilvánvalóan ott van, ahol a két függvény $(x_0 ; x_0)$ pontbeli érintője egybeesik, azaz merőleges az $y=x$ egyenesre (meredeksége -1). Ezekből a feltételekből a -ra és x -re egy kétismeretlenes egyenletrendszert írhatunk fel:

$$\left. \begin{array}{l} x = a^x \\ a^x \ln(a) = -1 \end{array} \right\} \text{ (Az egyenlet bal oldalán az exponenciális függvény deriváltja szerepel.)}$$

Ebből a kissé szokatlan egyenletrendszerből x és a – többszörös behelyettesítéssel – könnyen meghatározható:

$$x \ln a = -1 \quad \ln a^x = -1 \quad a^x = \frac{1}{e} \quad x = \frac{1}{e} \quad a^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \quad a = \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e} \approx 0.065988$$

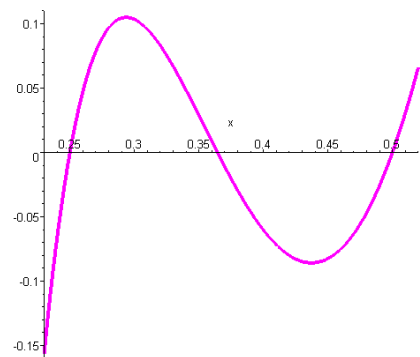
Azt kaptuk tehát, hogy ha $a \leq \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e} < 1$, akkor az $a^x = \log_a x$ egyenletnek egy valós gyöke van, $0 < a < \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e}$ esetben pedig, – így $a = \frac{1}{16} = 0.0625$ esetben is – három.

Megjegyezzük még, hogy az $a = \frac{1}{16} = 0.0625$ olyan közel van a határesethez, hogy a két oldalnak megfelelő függvény ábrázolásával semmi támpontot nem kapunk a kérdés eldöntéséhez. Az $\left(\frac{1}{15}\right)^x = \log_{\frac{1}{15}}(x)$ egyenletnek például a fentiek szerint csak egy valós gyöke van, mivel $e^{-e} \approx 0.06598 < \frac{1}{15} \approx 0.0666$

Legfeljebb úgy kaphatunk gyökök számára vonatkozóan jó sejtést, ha egy alkalmas függvényábrázoló programmal lerajzoljuk a két függvény különbségét. A mellékelt rajz az

$$y = 100 \left(\left(\frac{1}{16}\right)^x - \log_{\frac{1}{16}} x \right) \text{ függvény grafikonja, amelyről}$$

leolvasható, hogy az eredeti egyenletünknek a két oldalon vett helyettesítési értéke a $(0,2; 0,52)$ intervallumon alig $0,001$ -del tér el egymástól.



Könnyen misztikussá válhat a matematika, ha úgy kerül elénk egy (akár igaz, akár hamis) állítás, mint ahogy egy bűvész elővarázsol egy nyulat a cylinderből, a mélyen tisztelt publikum legnagyobb ámulatára. Íme egy „nyúl a kaplaptól” jellegű állítás, amely egy időben futótűzként terjedt az algebristák körében²:

Az $e^{\pi\sqrt{163}}$ hatvány egész szám, pontosan 262537412640768744 . Az állítás eléggé meglepő, hiszen a hatvány alapjában és kitevőjében egyaránt transzcendens szám áll.

Vajon igaz ez? Honnan „jön rá” valaki egy ilyen összefüggésre? Hogyan lehetne igazolni?

Ha valaki elénk állna egy nehezen követhető „bizonyítással”, nem lennének könnyű helyzetben. Ahhoz, hogy cáfoljuk, elegendő kellő pontosságig meghatározni a hatvány értékét. „Kézzel” ez is nehezen menne, ugyanis – [a Maple felhasználásával könnyen ellenőrizhető](#) – a kapott szám tört része mintegy 10 jegynyi pontosságig 0, csak ennél pontosabb számolás esetén kapunk 0-tól különböző számjegyeket. Akkor sem járnánk jobban,

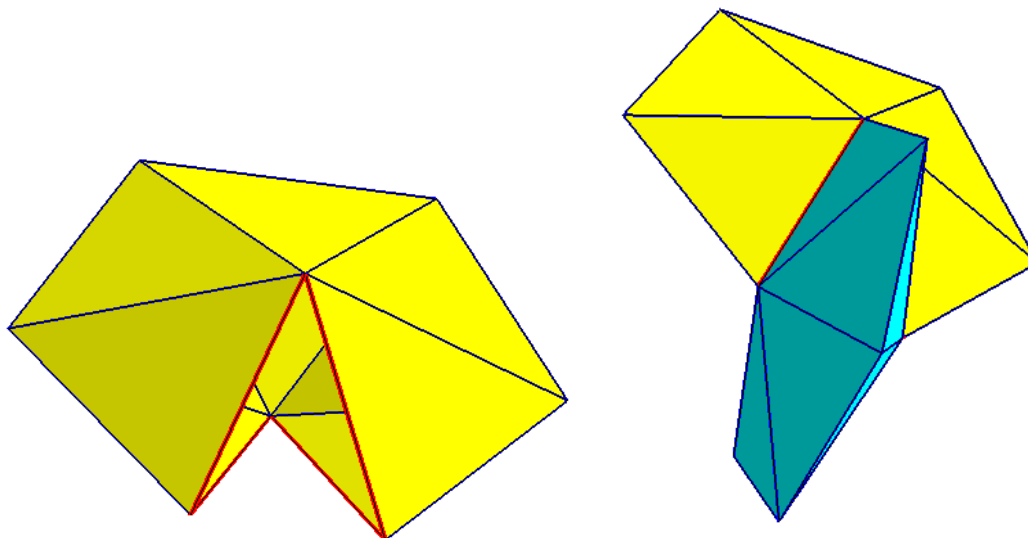
ha az „állítást” $\left(\frac{\ln(262537412640768744)}{\pi}\right)^2 = 163$ alakban írnák fel, ugyanis az egyenlőség

bal oldala valóban 163 mintegy 20 tizedesjegynyi (!) pontosságig. A Maple azonban ennél jóval nagyobb pontossággal is képes számolni, így végül is kiderül, hogy a vizsgált szám nem egész³.

A geometriában is könnyen találunk példát arra, hogy az „úgy tűnik” és az „úgy van”, mennyire nem ugyanazt jelenti. Készítsünk tíz – egységnyi oldalú – szabályos háromszögből egy „nyitott” kettős gúlát. Az, hogy „mennyire nyitott”, kizárólag a kettős gúla két szemközi csúcsa közötti távolságtól függ. Válasszuk ezt a távolságot akkorára, mint a gúlák közös alapjának a két szabadon maradt csúcsa közötti távolság. Ekkor két ilyen egybevágó alakzatot összeilleszthetünk egyetlen 20db szabályos háromszögből álló poliéderré (amit akár nevezhetnénk egy szerkezetében sem szabályos ikozaédernek).

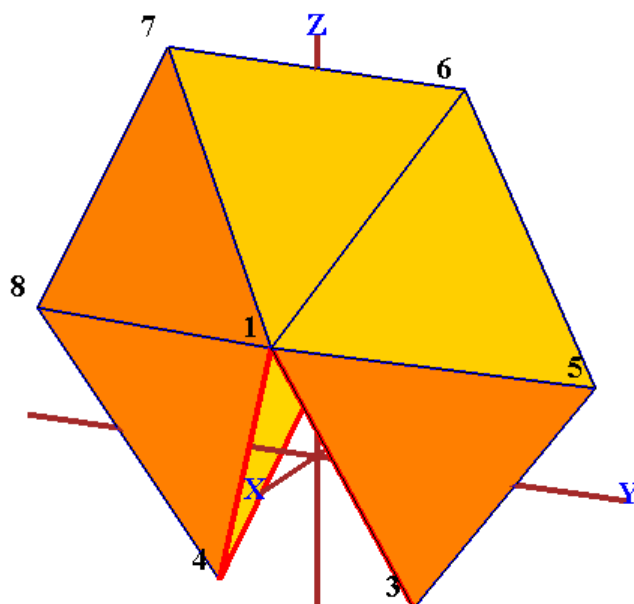
² <http://www.shef.ac.uk/puremath/theorems/nearint.html>

³ Tekintsük meg az erről készült [MAPLE programot](#)

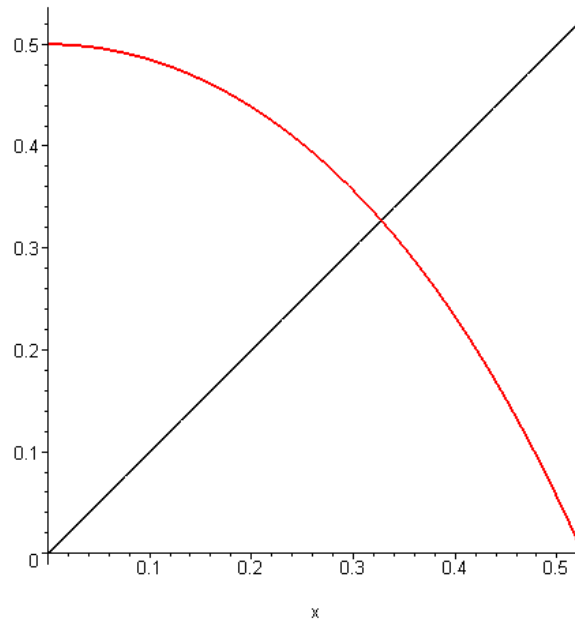


A poliéder papírmodelljét elkészítve tapasztalhatjuk, hogy ez a poliéder mozgatható: az egyik kettős gúla csúcsait összébb nyomva a másiknak a csúcsai messzebb kerülnek egymáshoz, és viszont. Valóban „mozgatható” ez a poliéder? Úgy tűnik. [De úgy is van?](#)

A kérdés eldöntésére rakjuk egy jól megválasztott térbeli koordináta-rendszerbe a konstrukciót, jelöljük x -el a kettős gúla **1.** és (az alábbi rajzon éppen nem látható) **2.** sorszámú csúcsa közötti távolság felét, y -nal a két szabadon maradó **3.** és **4.** csúcs távolságának a felét, majd írjuk fel y -t, mint x függvényét.



A részleteket most mellőzve, az $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \sin\left(5 \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$ összefüggést kaptuk.⁴



A függvénynek a geometriai tartalommal bíró $[0, x_0]$ intervallumát rajzoltuk fel, ahol

$$f(x_0) = 0, \text{ amelyből } x_0 = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \approx 0.5257$$

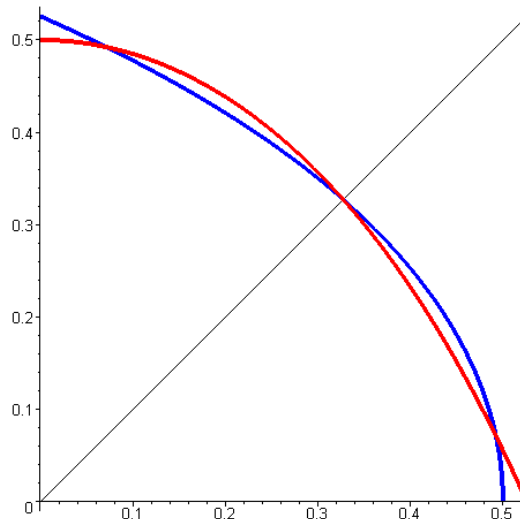
Ahhoz, hogy megadjuk a poliéder szabályos háromszögekből épített, biztosan létező változatának a koordinátáit, az $f(x) = x$ egyenletet kell megoldanunk. A fenti egyenlet közelítő gyökét a Maple könnyedén kiszámolja, elegendő nagy pontossággal: $x \approx 0.327267\dots$

Ha a poliéder mozgatható, akkor annak kell teljesülnie, hogy az egyik feléhez tartozó gúla-magasság (az **1.-2.** távolság) – legalább egy bizonyos intervallumon mozogva – folyamatosan olyan távolságot határoz meg a szabadon maradó **3.** és **4.** csúcsok között, amely éppen megegyezik a konstrukció másik kettősgúlájának a csúcsai közötti távolságával. Vagyis ha teljesül, hogy $y_1 = f(x_1)$, akkor annak is teljesülnie kell, hogy $x_1 = f(y_1)$ Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvénynek és inverzének ezen az intervallumon egybe kell esnie.

Az $f(x)$ függvény inverze (a vizsgált intervallumon) a $\bar{f}(x) = \sqrt{\frac{4x-5+\sqrt{8x+5}}{4x-10}}$ függvény.

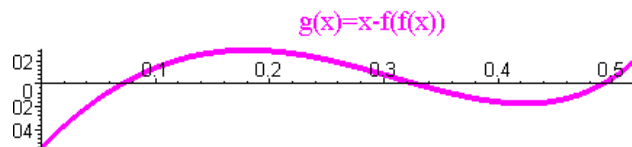
Már a függvényt lerajzolva is szembetűnő, hogy $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ pontosan három helyen metszi egymást – hasonlóan az előző példánkhoz. A Maple segítségével könnyedén kitapogatható az $f(x) = \bar{f}(x)$ egyenlet három gyöke, melyek a vizsgált intervallumba esnek.

⁴ Ez talán nem tűnik „nyúl a kalapból” jellegű állításnak [a mellékelt MAPLE program](#) talán segít ezt megvilágítani.



Az előzőek alapján nem lepődünk meg azon, hogy egy monoton függvény és az inverze akár három helyen is metszheti egymást. Az ábráról leolvasható, hogy a poliéder nem mozgatható ugyan, viszont van még két (egymással egybevágó) „stabil” változata, vagyis az $f(x)$ függvény és az inverze a vizsgált intervallumon belül valóban három helyen metszi egymást. Ezt először M. Goldberg mutatta ki 1978-ban. [1] Az összetartozó (x, y) értékpár: $(0.071185256\dots, 0.492373\dots)$ és fordítottja, valamint a $(0.327267375, 0.327267375)$ pont, ahol a 0.327267375 szám az $x=f(x)$ egyenletnek is a (közelítő) gyöke.

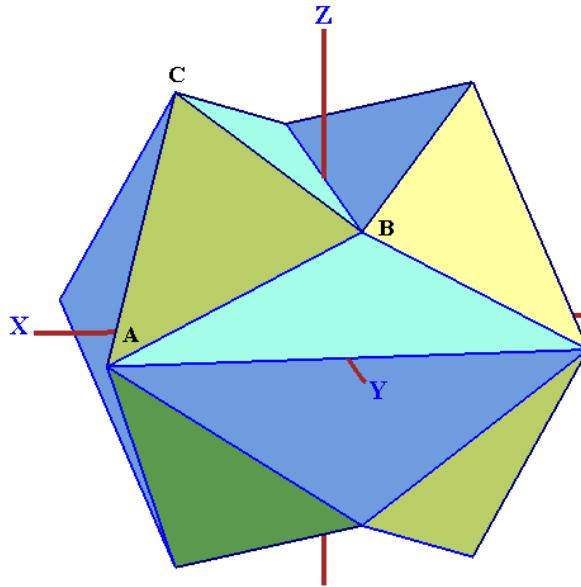
Ezeknek a numerikus értékeknek a meghatározásához nem kell feltétlenül az $f(x)$ inverzét megtalálnunk, ezek a metszéspontok ugyanott vannak, ahol a $g(x) = x - f(f(x))$ függvény zérushelyei:



Ha a szabályos háromszögek helyett olyan egyenlőszárú háromszögekből építjük fel a poliédert, amelynek a szára 3% -kal kisebb, vagy nagyobb, mint az alapja, akkor már csak egyetlen „stabil” poliédert kapunk. Az így kapott poliéder viszont csak akkor lehetne mozgatható, ha a $g(x)$ függvény – legalább egy intervallumon – azonosan 0 értéket venne fel. Ez viszont biztosan nem teljesül.

Gyakorlatilag ugyancsak könnyedén mozgatható annak a poliédernek a papírmodellje, amelynek a csúcsai megegyeznek egy ikozaéder csúcsaival, lapjai vagy szabályosak, vagy un.

tompaszögű arany-háromszögek: száruk egységnyi, alapjuk $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, az aranymetszés aránya.



Legyen ennek a poliédernek A , B és C az a három csúcsa, amelyek egy – az egyszerűbb számolás kedvéért 2 egységnyi oldalhosszú – szabályos háromszöget határoznak meg. A poliédert elhelyezhetjük úgy a térbeli derékszögű koordinátarendszerben, ahogy az ikozaédert is legcélszerűbb: e három pont essen a három koordináta-síkra. Legyenek a koordinátáik:

$$A = [y, x, 0]$$

$$B = [0, y, x]$$

$$C = [x, 0, y]$$

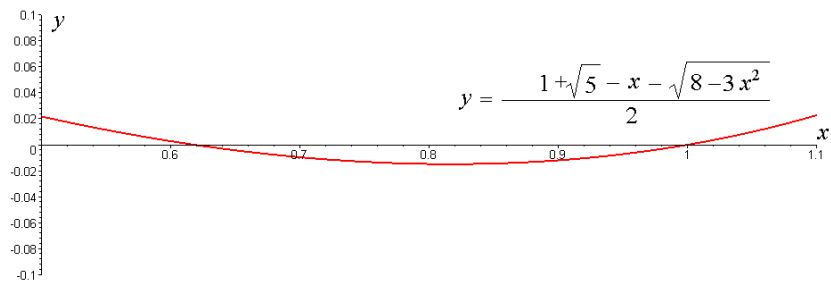
Felírva a pontok közötti távolságot, x és y között egyetlen összefüggéshez, az $y = f(x) = \frac{x + \sqrt{8 - 3x^2}}{2}$ függvényhez jutunk⁵. Erre a függvényre – mint várható volt –

teljesül, hogy $f(1) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$ (amely éppen a szabályos ikozaéder koordinátáit jelenti) de

emellett, $f(\tau - 1) = f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$ is teljesül, sőt e két stabil helyzet között $f(x) - \tau$

nem több, mint 0.015 -del, tehát kevesebb, mint 1%-kal tér el a 0-tól. De eltér, így matematikailag ez sem mozgatható, ennek a lapjaival adott poliédernek ez a két stabil helyzete van.

⁵ Amennyiben adottak a feltételek, javasoljuk, hogy ellenőrizze a számításokat [ezzel a MAPLE programmal](#).

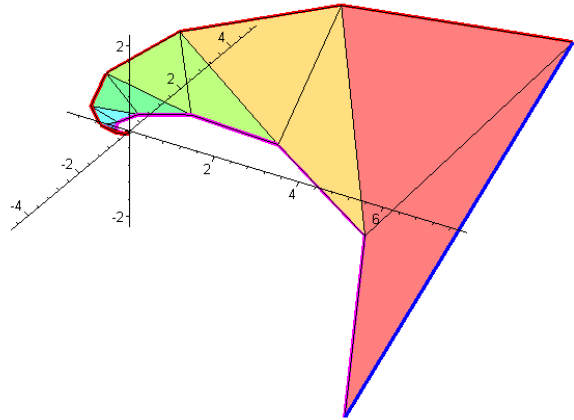
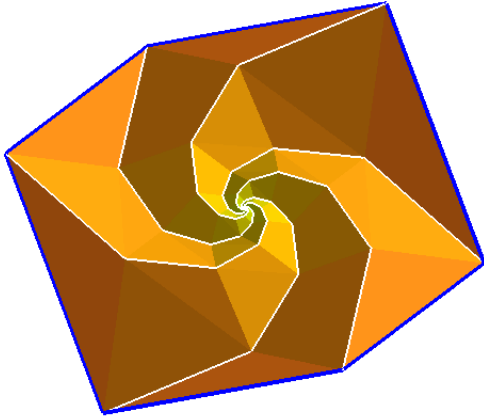


Megjegyezzük még, hogy ismert több, látszólag [mozgatható poliéder](#) ([2], 224. old., azonban igen nehéz valóban, matematikai eszközökkel igazolható módon mozgatható poliédert konstruálni. [2], 246.old. Pl. e sorok írója nem ismer más bizonyítottan mozgatható poliédert, mint az itt: ([2], 246.old.) leírt 9 csúcú, 14 lapú és 21 élű konkáv poliédert. Arról, hogy ez a poliéder valóban mozgatható, Csirmaz László írt egy bizonyítást.[4] Magát a poliédert Klaus Steffen találta meg.

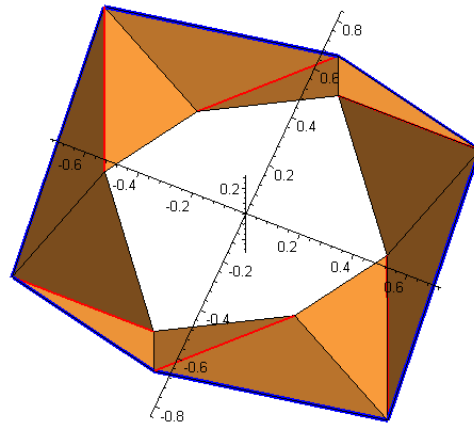
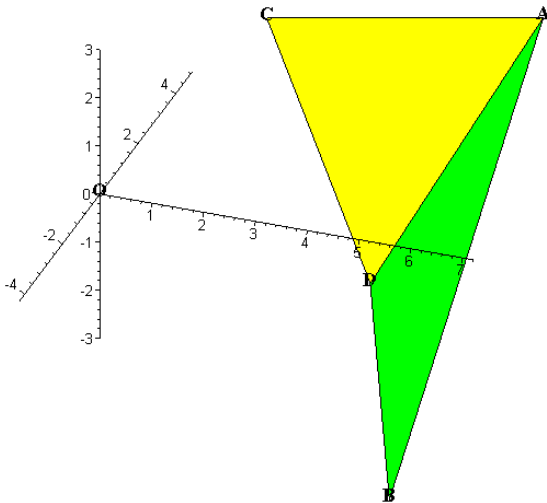
Azt, hogy a konvex poliéderek merevek, először Cauchy bizonyította 1813-ban. Cauchy tétele pontosan így szól: „*Ha két konvex poliéder felépítése azonos és megfelelő lapjaik egybevágók, akkor vagy orientációtartóan, vagy tükrösen egybevágók (valamely síkra vonatkozóan).* Ez a tétel többet mond ki annál, hogy nem mozgathatók, konvex poliéderekkel az sem fordulhat elő, mint a fent említett poliéderekkel, hogy ti. azonos (topológiai) felépítés és egybevágó lapok esetén is akadhat több, egymással nem egybevágó változata is a poliédernek. A Cauchy-tétel bizonyítása egyébként eléggé hosszadalmas. ([2], 228. old.) , ([5]. 58. feladat.)

Reméljük sikerült megvilágítanunk, miért volt szükség arra, hogy némi gyanakvással, vagy legalábbis kellő óvatossággal fogjunk hozzá a térbeli spidron-fészkek mozgásának az elemzéséhez.

A spidron-"**fészkek**" egy szabályos hatszög alkalmas módon történő összehajtásával előálló felület. Egy ilyen fészkek hat, egymással egybevágó "**kar**"-ból áll, ahol mindegyik kar **alapalakzatok** egymáshoz kapcsolódó sorozata. Ez a sorozat akárhány ilyen alapalakzattól állhat, gyakorlatilag a sorozatnak az első néhány tagját célszerű meghatározni, lerajzolni. Mondjuk azt, hogy a spidron (-fészkek, ill.-kar) mélysége n , ha egy spidron-kar n egymáshoz kapcsolódó alapalakzattól áll.



Egy alapelakzat egy 120° -os csúcshögü egyenlőszárú háromszögből (ABD háromszög) és egy ehhez illesztett szabályos háromszögből (ACD háromszög) áll, amelyek együtt – amennyiben egy síkban vannak – egy derékszögü háromszöget alkotnak.



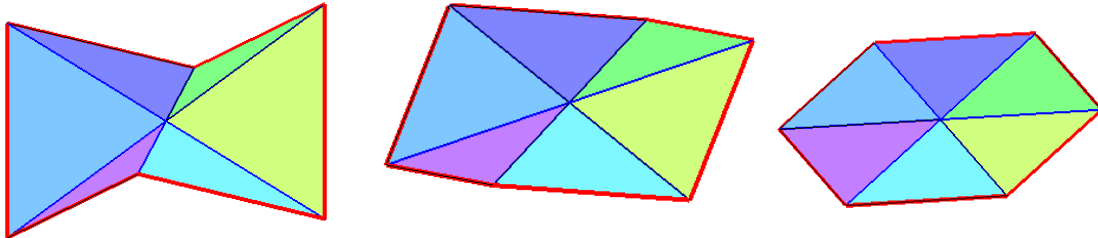
Használni fogjuk még a spidron-**gyűrű** elnevezést, amely lényegében egy 1 mélységü spidron-fészkek: hat egymáshoz kapcsolt egybevágó alapelakzattól áll.

A spidron-fészket szemügyre véve – és a lehetséges módon deformálva (hajtogatva) – észrevehetjük, hogy a fészkek „szélét” alkotó térbeli hatszögvonal egymással egyenlő élei mind ugyanakkora szöget zárnak be egy síkkal, amely e hat él felezőpontjainak a síkja. Nevezzük ezt a spidron-fészkek **síkjának** (noha maga a spidron-fészkek csak határesetben síkidom: ez a síkbeli spidron-fészkek). A spidron-fészkek szélét alkotó térbeli szabályos hatszögek⁶ e síkra eső merőleges vetülete ugyancsak szabályos hatszög.

Térbeli szabályos hatszöget kapunk, ha egy hatszögvonaltól csak azt követeljük meg, hogy élei, valamint a szomszédos élek szögei egyenlők legyenek. A térbeli hatszögvonal természetesen nem határoz meg egy hatszöglapot. Nevezzük **térbeli szabályos hatszöglapnak** azt a hat egyenlőszárú háromszögből álló alakzatot, amelyben a háromszögek

⁶.

alapjai a térbeli szabályos hatszög vonal élei, közös csúcsuk e hatszög vonal középpontja. A térbeli szabályos hatszöglap az egymáshoz csatlakozó élei mentén mozgatható ugyan, de ha megköveteljük, hogy maradjon térbeli szabályos hatszög, akkor merev, hiszen ha az élei nagyobb szöget zárnak be a hatszög síkjával, akkor közelebb kerülnek az origóhoz, így csökkennek a hatszöglapokat alkotó egyenlőszárú háromszögek szárai. A térbeli szabályos hatszög középpontosan szimmetrikus alakzat és – mint látni fogjuk – a spidron-fészek is az.



A spidron-fészek szélétől követeljük meg, hogy (térbeli, vagy síkbeli) szabályos hatszög vonal legyen.

Azt fogjuk belátni, hogy ha a spidron-fészek széle, amely egyben az első spidron-gyűrű külső széle térbeli szabályos hatszög, akkor a belső széle is az. Ez teszi lehetővé, hogy a spidron-fészek egymásba illesztett gyűrűk sorozataként is felépíthető. Egy spidron-gyűrű belső szélének az élei kisebb szöget zárnak be a spidron síkjával, mint a külső. Emiatt nem mondhatjuk, hogy a „végtelenül mély” térbeli spidron-fészek önmagához hasonló alakzat. A síkbeli viszont az.

Ahhoz, hogy egy spidron fészek mozgását leírjuk, elegendő egyetlen alapalakzat mozgását elemeznünk, mivel ilyen alapalakzatokból a megfelelő paraméterek megadásával felépíthető egy kar, abból pedig egybevágósági transzformációkkal az egész spidron-fészek.

Helyezzük a spidron-fészeket egy térbeli koordinátarendszerbe úgy, hogy síkja az (xy) sík legyen, középpontja legyen az origó.

Egy, a spidron-fészek szélét alkotó szakaszt három paraméterrel jellemezhetünk:

- d : a szakasz hossza;
- α : a szakasz felezőponjába mutató helyvektor irányszöge;
- β : a szakasznak az (xy) síkkal bezárt szöge.

Ezt az alábbi Maple eljárásban realizáltuk:

```
V:= proc(d,alpha,beta)
  local F,A,c,V;
    c:=d*cos(beta)*sqrt(3)/2:
    F:=[c*cos(alpha),c*sin(alpha),0]:
    A:=[d*sin(alpha)*cos(beta)/2,
        d*cos(alpha)*cos(beta)/2,
        d*sin(beta)/2]:
    V:=[F+A,F-A]:
  end proc:
```

A szakasznak az xy síkra eső merőleges vetülete $d \cos(\beta)$, így felezőpontja az origótól $c = d \cos(\beta) \frac{\sqrt{3}}{2}$ távolságra van, Ebből felírhatók a felezőpont koordinátái, majd a szakasz végpontjának a koordinátái. E két pont koordinátáit kapjuk az eljárás outputjaként (kimenő adataiként).

Magát a spidron-fészket egyértelműen meghatározza a külső spidron-gyűrű, azt pedig a feltételeinknek eleget tevő térbeli hatszög, e gyűrű külső széle. Ezt a térbeli hatszöget pedig két adattal jellemezhetjük: egy oldalának a d hosszával és az oldal xy síkkal bezárt f szögével.

Az alapalakzatunk AB oldalát helyezük el úgy, hogy a felezőpontja a koordináta-rendszer x tengelyére essen. A CD szakaszt írjuk fel a fenti eljárás felhasználásával, egyelőre meghatározatlan paraméterként kezelve a felírására használt a és b változókat. Így az alapalakzat csúcsai így írhatók fel:

$$A := \left[\frac{1}{2} d \cos(f) \sqrt{3}, \frac{1}{2} d \cos(f), \frac{1}{2} d \sin(f) \right]$$

$$B := \left[\frac{1}{2} d \cos(f) \sqrt{3}, -\frac{1}{2} d \cos(f), \frac{1}{2} d \sin(f) \right]$$

$$C := \left[-\frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \cos(a), \right. \\ \left. \frac{1}{6} d \sqrt{3} \cos(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \sin(a), \frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(b) \right]$$

$$D := \left[\frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \cos(a), \right. \\ \left. -\frac{1}{6} d \sqrt{3} \cos(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \sin(a), -\frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(b) \right]$$

A feladatunk az, hogy úgy adjuk meg az a és b értékét, mint f függvényét, hogy a BD , DC , CA és DA szakaszok hossza egyaránt $d \frac{\sqrt{3}}{3}$ hosszú legyen. A $CD = d \frac{\sqrt{3}}{3}$ a felírásból adódóan egy bármely (a, b) értékre fennálló azonosság. Az a transzformáció, amely az AB szakaszt a CD -be viszi, az A -t a C -be, B -t a D -be transzformálja, így mindenképpen teljesülnie kell az $AC=BD$ összefüggésnek. Ezt a Maple is azonnal igazolta, így két egyenletből álló egyenletrendszerünk maradt, amelyben a -t és b -t ismeretlennek, az f változót pedig független paraméternek tekintjük:

$$e1 := \frac{3}{4} \cos(b)^2 - 2 \cos(b) \cos(a) \cos(f) \sqrt{3} + \frac{9}{4} \cos(f)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin(b) \sin(f)$$

$$e2 := \frac{3}{4} \cos(b)^2 - 3 \sin(a) \cos(b) \cos(f) - \cos(b) \cos(a) \cos(f) \sqrt{3} + \frac{9}{4} \cos(f)^2 \\ + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin(b) \sin(f)$$

Az egyenletrendszer Maple által megadott megoldásai közül "kézzel" kellett kiválasztani azt, amely a feladat geometriai tartalmának megfelel. A kapott eredmények egyszerűbb alakra

hozásához is alkalmasint „segíteni” kellett a Maple –nek. Ugyanis a geometriai tartalomból adódóan elvégezhetőek voltak olyan trigonometriai egyszerűsítések, amelyeket a programnak nem volt „joga” elvégezni. Így kaptuk a -ra és b -re az alábbi – f -től függő – kifejezéseket:

$$a(f) = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}(1-2\cos(f)+3\cos^2(f)) - \sin(f)\sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos^2(f)}}{4\cos(f)\sqrt{2-4\cos(f)+3\cos^2(f)}} \right)$$

$$b(f) = \arctan \left(\sqrt{\frac{-1+4\cos(f)-3\cos^2(f)}{2-4\cos(f)+3\cos^2(f)}} \right)$$

Mivel a „kézi” és „gépi” számolást együtt alkalmaztuk, nem lehettünk biztosak abban, hogy ezek a függvények valóban leírják a spidron mozgását, amíg nem ellenőriztük, hogy a f paraméter értékétől függetlenül minden esetben teljesül az $e_1=0$ és $e_2=0$ egyenlőség. A vizsgálat arra vezetett, hogy az alábbi – elrettentésképpen bemutatott – trigonometrikus kifejezésről kellett belátni, hogy minden szóba jövő f értékre nézve f -től függetlenül azonosan nulla:

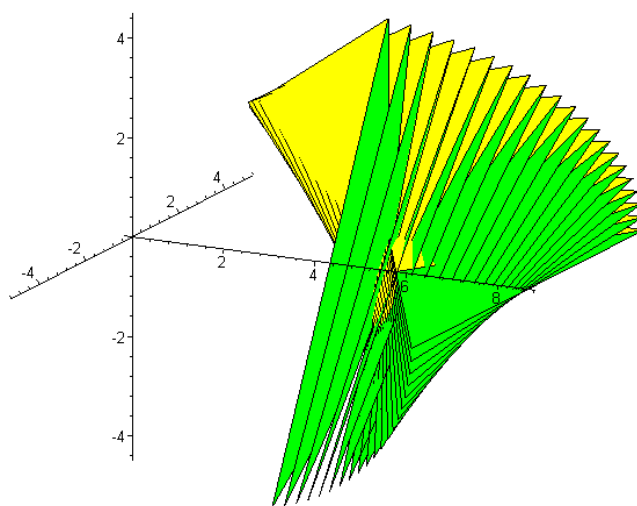
$$\begin{aligned} & -3\cos(f)^2 - 1 + 2\cos(f) + 2\sqrt{2} \left(\left(2\cos(f)^2 - 12\cos(f)^3 + 9\cos(f)^4 - 1 + 4\cos(f) + \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) - 2\sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \cos(f) \sqrt{3} \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) + 3 \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(f)^2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) \right) / \left((2-4\cos(f)+3\cos(f)^2) \cos(f)^2 \right) \right)^{(1/2)} \\ & \cos(f) \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} - 4\sqrt{2} \left(\left(2\cos(f)^2 - 12\cos(f)^3 + 9\cos(f)^4 - 1 \right. \right. \\ & \left. \left. + 4\cos(f) + \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) - 2\sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \cos(f) \sqrt{3} \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) + 3 \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(f)^2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) \right) / \left((2-4\cos(f)+3\cos(f)^2) \cos(f)^2 \right) \right)^{(1/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos(f)^2 \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} + 3\sqrt{2} \left(\left(2\cos(f)^2 - 12\cos(f)^3 + 9\cos(f)^4 - 1 \right. \right. \\
& + 4\cos(f) + \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \\
& \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) - 2\sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \\
& \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \cos(f) \sqrt{3} \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) + 3 \\
& \cos(f)^2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \\
& \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) \right) / \left((2-4\cos(f)+3\cos(f)^2) \cos(f)^2 \right) \right)^{(1/2)} \\
& \cos(f)^3 \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} - \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \\
& \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f)
\end{aligned}$$

Sikerült. Ehhez ismét a program és a gyanakvó felhasználó együttes munkájára volt szükség.

Megnyugtató módon sikerült belátni, hogy spidron-fészek valóban mozgatható, és a fenti $a(f)$ és $b(f)$ függvényekkel írható le a mozgása.

Bár e két függvény értelmezési tartománya ennél bővebb, a geometriai tartalommal bíró $\beta_1 = f$ értékek a $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumba esnek. Ugyanis $f = \frac{\pi}{3}$ esetén az ABD és ACD háromszögek egyaránt merőlegesek az (xy) síkra, így e fölött már fizikailag nem realizálható, önátmetsző felület kapnánk.



[Magának egy spidron-karnak, ill. a spidron-fészeknek az előállítására e paraméterek ismeretében már könnyen megoldható feladat.](#)

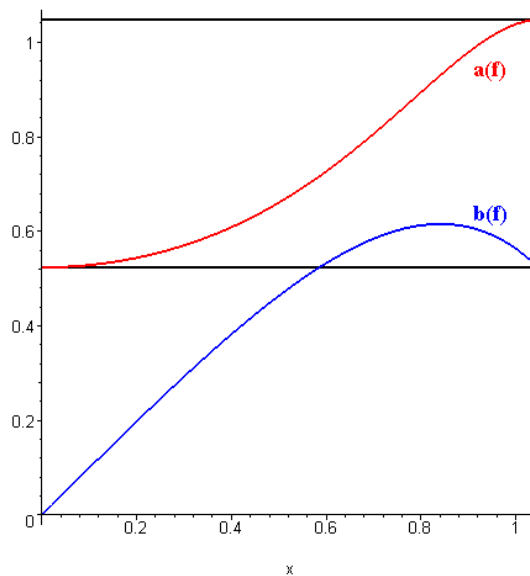
Az első alalakzat $d_1 = d$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = f$ adataiból kiindulva a spidron-kar k -edik alalakzatának bemenő adataiból az alábbi – szimultán – rekurzív képletekkel kapjuk a $k+1$ -edik alalakzat bemenő adatait:

$$d_{k+1} = \frac{d_k \sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + a(\beta_k)$$

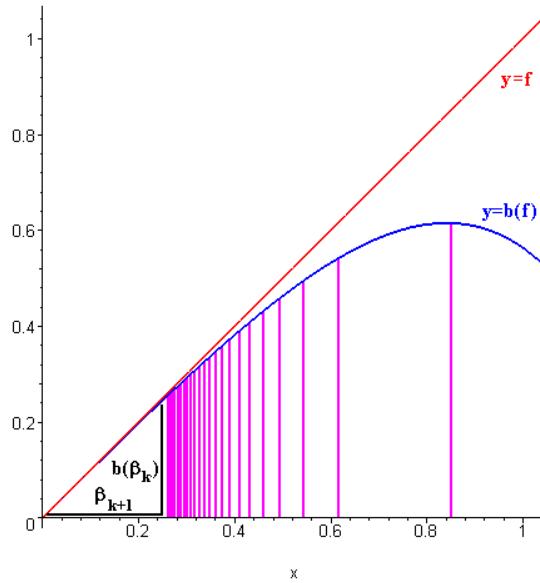
$$\beta_{k+1} = b(\beta_k)$$

Az $a(f)$ és $b(f)$ függvények grafikonja önmagában nem sok lehetőséget nyújt a spidron-fészek tulajdonságainak az elmélyültebb elemzésére.



Legfeljebb annyit állapíthatunk meg, hogy minél nagyobb a legkülső gyűrű oldalainak az xy síkkal bezárt szöge, annál jobban – $f = 60^\circ$ esetén éppen 60° -kal – fordul el az első spidron- gyűrű belső hatszögének az xy síkra eső merőleges vetülete a külső vetületéhez képest. Az elfordulás mértéke egyre csökken, síkbeli esetben 30° . Ugyanígy az éleknek az xy síkkal bezárt szöge is fokozatosan csökken, bár ez csökkenés igen lassú, vagyis a spidron fészek egyre beljebb lévő – és egyre kisebb – gyűrűi egyre jobban bele simulnak az (xy) síkba.

De vajon biztosan bele simulnak-e?



Azt kell igazolnunk, hogy a

$$\beta_1 = f \quad \left(0 \leq f \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\beta_{k+1} = b(\beta_k) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

rekurzív képletessel megadott sorozat a 0-hoz tart, azaz $\lim \beta_n = 0$, vagyis a fenti ábránk függőleges vonalai csak az origóban sűrűsödnek össze.

A kérdés azért nem nyilvánvaló, mert ha az $y = b(f)$ függvény helyett az $y = f$ függvénnyel határoznánk meg egy ilyen rekurzív sorozatot, akkor az egy konstans sorozat lenne. A mi $b(f)$ függvényünk azonban éppen az $y = f$ függvényhez simul hozzá az origó közelében:

$$\lim_{f \rightarrow 0^+} (b'(f)) = 1$$

Akár „kézzel”, akár a MAPLE felhasználásával könnyen belátható, hogy a $b(f)$ függvény folytonos a vizsgált $\left(0, \frac{\pi}{3} \right]$ intervallumon. Ezen az intervallumon az is teljesül, hogy $b(f) < f$.

Általánosabban: ha az $y = b(f)$ függvény folytonos, és a vizsgált intervallum minden értékére teljesül, hogy $0 < b(f) < f$ akkor az összes ily módon megadott rekurzív sorozat 0-hoz tart. Ha ugyanis nem így lenne, hanem a sorozat határértéke egy $0 < h$ szám lenne, akkor a függvénynek – a folytonosság miatt – a h pontban éppen h lenne a helyettesítési értéke, ami ellentmondana a feltételeinknek.

A matematika eszközei persze nem adnak szemléletes képet arról, hogy ez a sorozat milyen „lassan” tart a 0-hoz, vagyis egy térbeli spidron fészek középpontja felé haladva, mikor válik a fészek belseje közel ugyanolyanná, mint egy síkbeli spidron fészek.

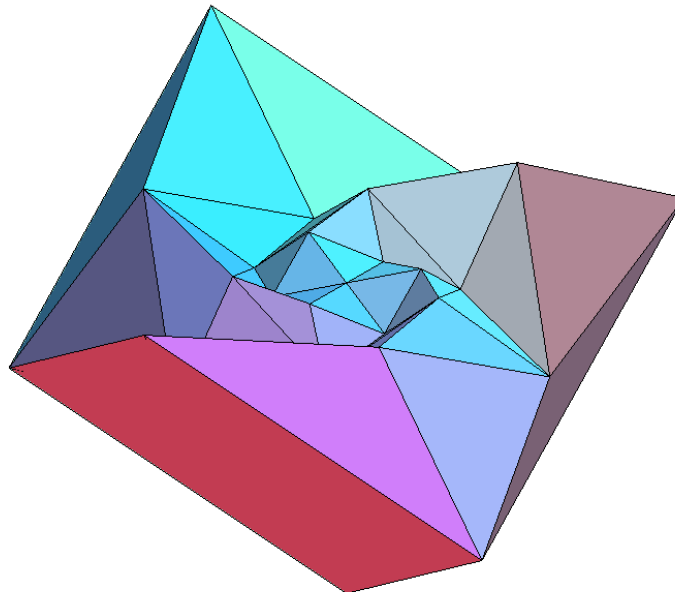
Itt <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html> egy igen figyelemre méltó weblap, amely szemlélteti, hogy a világegyetem mérete mai ismereteink

szerint mintegy 10^{23} méter, a legkisebb ismert (?) fizikai fogalom az atommagot alkotó kvark mérete 10^{-16} méter.

Induljunk ki egy „világméretű” térbeli spidron-fészkekből, amelynek egy éle – mondjuk – 10^{23} méter. Mivel minden spidron-gyűrű belső éle $\frac{\sqrt{3}}{3}$ -szor kisebb, mint a külső, mintegy 170 lépés után jutunk a kvark-méretű spidron gyűrűhöz. Nos, a MAPLE segítségével könnyen belátható, hogy ennek az éle még több, mint 6° -os szöget zár be a spidron síkjával. Persze mindez játék a formákkal (vagy fogalmakkal), amit nem kell túl komolyan venni.

Gyakorlatilag egy spidron-fészke modellje legfeljebb 5-6 gyűrűből áll, a közepén egy lyukkal. Lerajzolni is legfeljebb 8-9 gyűrűnyi részt érdemes.

Ha azt szeretnénk, hogy a spidron fészke felülete folytonos legyen, ezért ezt a belsejében lévő „lyukat” befoltozzuk egy térbeli szabályos hatszöggel. Az így kapott véges sok háromszögből álló felület,- amelyből alkalmasint poliéder állítható össze, azonban – matematikai szempontból – merev, mivel a belsejében lévő térbeli szabályos hatszöglap nem mozgatható.



Itt most éppen egy három spidron gyűrűből, és a közepét befoltozó hat háromszögből álló felületből és egy kocka három szomszédos lapjából álló $6 \cdot 7 + 3 = 45$ lapú poliédert mutatunk be. Ennek a konstrukciónak egy „jobbos” és egy „balos” változata egyetlen kockává illeszthető össze.

Megjegyezzük még, hogy nincs értelme felvetnünk azt kérdést, hogy egy spirál-formát mutató spidron-fészke jobbra, vagy balra csavarodik-e, legfeljebb annak, hogy két, egymáshoz illesztett spidron-fészke ugyanolyan, vagy ellentétes irányú spirálvonalat közelít-e meg.

A spidron gyűrűkből, spidron fészkekből építhető különböző szemet gyönyörködtető, fantáziát megmozgató konstrukciók előállításában azonban már a spidron felfedezőjének, és nem egy óvatos, olykor akadékoskodónak tűnő géométernek a feladata.

Ugyancsak nagyobb – immár matematikai – fantáziát igényelne a „végtelenül mély” spidron-fészek értelmezése, és matematikai szempontú elemzése, amely során azt mondjuk, hogy az első spidron-gyűrűt kivéve mindegyiknek van egy külső és egy belső szomszédja. Azonban az ezzel kapcsolatos, vagy egyéb matematikai jellegű vizsgálatok már [túl mutatnak e cikk keretein](#).

Irodalom:

- [1] CROMWELL, P.M.: *Polyhedra* University Press, Cambridge, 1997
- [2] GOLDBERG, M: *Unstable Polyhedral Structures* Math. Magazine 51 (1978) pp165-170
- [3] SHARAGIN I. F: *So, what's wrong?* , QUANTUM , Vol 8, Number 6, July/August 1998., p. 34-37,53-54
- [4] CSIRMAZ LÁSZLÓ: *Mozoghat-e valaki, akit síklapokkal határolt páncélba öltöztettünk?* KÖMAL 1979 november (119.-123. old)
- [5] SKRJSZKÍJ – CSENCOV –JAGLOM: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 3. Geometria II. (Sztereometria)*Tankönyvkiadó, Budapest, 1968